Метод математической индукции. Добавка

Часто требуется доказать утверждение типа: *«Для каждого натурального n верно, что ...»*. Такое утверждение можно рассматривать, как цепочку утверждений
«Для $n = 1$ верно, что ...», «Для $n = 2$ верно, что ...» и т.д.

Метод математической индукции состоит в том, чтобы доказать первое из этих утверждений (называемое **БАЗОЙ** или основанием индукции), что обычно достаточно просто сделать, а затем доказать **ШАГ** (или **переход**) индукции: «Если верно утверждение с номером n, то верно утверждение с номером $(n + 1)$».

Если верна база индукции и верен шаг индукции, то все утверждения верны.

1. Найдите ошибку
   (а) Докажем, что $n > n + 1$. Действительно, пусть это утверждение верно для n, то есть $n > n + 1$. Прибавив к обеим частям равенства единицу, мы получаем, что $(n + 1) > (n + 1) + 1$, то есть верно утверждение для $n + 1$.
   (б) Докажем, что в произвольном стаде из N коров все коровы одного цвета.
   База индукции. В любом стаде из одной коровы все коровы, очевидно, одного цвета.
   Шаг индукции. Предположим, что в любом стаде из N коров все коровы одного цвета. Докажем, что в любом стаде из $N+1$ коровы все коровы одного цвета. Рассмотрим произвольное стадо из $N+1$ коровы. Возьмем в нем произвольную корову A. Оставшиеся N коров одного цвета. Теперь возьмем другую корову B. Оставшиеся N коров также одного цвета. В частности, одного цвета со всеми коровами, кроме A и B, и B одного (того же!) цвета со всеми коровами, кроме A и B. Значит, A, B, и вообще все коровы в стаде одного цвета.

2. На лестнице нарисованы стрелочки. На одной из ступеней стоит робот. Он идет со ступеньки в ту сторону, в которую указывает стрелочка, после чего стрелочка на ступеньке, с которой он сошел, обращается в противоположную сторону. Докажите, что когда-нибудь робот покинет лестницу.

3. На кольцевом шоссе стоят несколько автомобилей с общим запасом бензина, достаточным, чтобы объехать весь круг. Докажите, что можно сесть в один из автомобилей и проехать все шоссе, забирая по дороге бензин у остальных автомобилей.

4. Известно, что $x + \frac{1}{x}$ – целое число. Докажите, что $x^n + \frac{1}{x}^n$ – также целое при любом целом n.

5. В прямоугольнике $3 \cdot n$ стоят фишки трёх цветов, по n штук каждого цвета. Доказать, что можно переставить фишки в каждой строке так, чтобы в каждом столбце были фишки всех цветов.