

## Ноды Ноки

**Определение 1.** Наибольшим общим делителем натуральных чисел  $a, b$  называется такое число  $d$ , что  $d$  общий делитель  $a, b$ , причём  $d$  - наибольший из общих делителей.

**Определение 2.** Наименьшим общим кратным натуральных чисел  $a, b$  называется такое число  $m$ , что  $m$  делится на  $a, b$ , причём  $m$  - наименьшее из таких чисел.

**Важно.** Поскольку  $\text{НОД}(a, b)$  - делитель  $a, b$ , удобно бывает представить  $a, b$  в виде

$$a = d \cdot m, b = d \cdot n, \text{ где } \text{НОД}(a, b) = d$$

1. Найдите НОД и НОК **(а)** 45 и 666; **(б)** 210 и 462; **(в)**  $x$  и  $3x$ ;
2. **(а)** Докажите, что  $\text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b) = ab$ ;  
**(б)** Всегда ли выполнено  $\text{НОК}(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \text{НОД}(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$  при  $n > 2$ ?
3. Может ли для натуральных чисел  $a, b$  быть выполнено  $\text{НОД}(a, b) > a - b$ ?
4. Известно, что  $\text{НОД}(a, b) = 15$ ,  $\text{НОК}(a, b) = 360$  и  $a > b$ . Найдите такие  $a$  и  $b$ . Укажите все варианты.
5. Найдите такие натуральные  $a, b$ , что их разность равна 21, а НОК равен 28.
6. Про натуральные числа  $a$  и  $b$  известно, что  $a^2 + b^2$  делится на  $ab$ . Докажите, что  $a = b$ .
7. Натуральные числа  $a$  и  $b$  — таковы, что  $a^2 - a \cdot \text{НОД}(a, b) = \text{НОК}(a, b)$ . Докажите, что число  $b$  делится на  $(\text{НОД}(a, b))^2$ .
8. Каким может быть наибольший общий делитель натуральных чисел  $m$  и  $n$ , если при увеличении числа  $m$  на 6 он увеличивается в четыре раза?
9. Найдите все пары натуральных  $a$  и  $b$ , для которых  $\text{НОК}(a, b) - \text{НОД}(a, b) = \frac{ab}{5}$ .
10. Докажите, что если для некоторых  $a$  и  $b$  верно, что  $\text{НОК}(a, a + 5) = \text{НОК}(b, b + 5)$ , то  $a = b$ .