Сравнение по модулю

Определение 1. Разделить целое число a на натуральное число b, значит найти такие целые числа q и r, что $a = bq + r$. При этом требуется выполнение неравенства $0 \leqslant r < b$. Числа q и r называются неполным частным и остатком при делении a на b

Определение 2. Числа a и b называют сравнимыми по модулю n, если они дают одинаковые сотатки при делении на n

Определение 3. Если числа a и b сравнимы по модулю n, то будем писать $a \equiv b\ mod\ n$

1. Покажите, что если a и b сравнимы по модулю n, то $a - b$ делится на n

2. **(а)** Если $a \equiv b\ (mod\ n)$, то $a + c \equiv b + c\ (mod\ n)$
   (б) Если $a \equiv b\ (mod\ n)$, то $ac \equiv bc\ (mod\ n)$.
   (в) Если $a \equiv b\ (mod\ n)$, а $b \equiv c\ (mod\ n)$, то $a \equiv c\ (mod\ n)$
   (г) Если $a \equiv b\ (mod\ n)$, а $c \equiv d\ (mod\ n)$, то $a + c \equiv b + d\ (mod\ n)$
   (д) Если $a \equiv b\ (mod\ n)$, а $c \equiv d\ (mod\ n)$, то $ac \equiv bd\ (mod\ n)$
   (е*) Если $a \equiv b\ (mod\ n)$, то $a^k \equiv b^k\ (mod\ n)$

3. Найдите остаток от деления

   (а) $(49)^{100}$ на 16; **(б)** $(7)^{100}$ на 16; **(в)** $(-7)^{100}$ на 16 **(г)** $(2)^{100}$ на 3; **(д)** $696 \cdot 697 \cdot 698 \cdot 699$ на 70; **(е)** $(2)^{2021}$ на 7; **(ж)** $(-50)^{2021}$ на 9; **(з)** $(3)^{2021} + (2)^{2021}$ на 7.

Интересный факт. Иногда в задачах полезно рассматривать остатки парами: a и $-a$.

4. Докажите, что $1^{45} + 2^{45} + \ldots + 38^{45}$ делится на 13.

5. **(а)** Делится ли число $2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 102 + 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 101$ на 103?
   (б) Делится ли число $2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 100 + 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99$?

6. Какие остатки могут давать квадраты натуральных чисел при делении на $3, 4, 5, 7$?

7. Натуральные числа x, y, z таковы, что $x^2 + y2 = z^2$. Докажите, что хотя бы одно из них делится на 3.

8. Докажите, что число $5^{2021} + 8$ – составное.

9. Докажите, что $n^3 - n$ делится на 24 для любого n.

10. Докажите, что ни при каком натуральном k число $3^k + 5^k$ не является квадратом натурального числа.

11. Докажите, что если p и q – два простых числа, причем $q = p + 2$, то $p^q + q^p$ делится на $p + q$.