

Индукция. Текстовые задачи.

Пример. Ханойские башни. Головоломка «Ханойские башни» представляет собой N дисков, нанизанных в порядке уменьшения размеров на один из трех колышков. Требуется переместить всю башню на другой колышек, перенося каждый раз только один диск и не помещая больший диск на меньший. Докажите, что головоломка имеет решение.

1. Докажите, что монетами 3 и 5 тугриков можно заплатить любую сумму, начиная с 8 тугриков.
2. Можно ли разрезать на такие трехклеточные уголки квадрат следующих размеров без одной клетки (вырезана может быть любая клетка квадрата, даже откуда-то из середины)
 - (а) 2×2
 - (б) 4×4
 - (в) $2^n \times 2^n$
3. Найдите ошибку в следующем рассуждении: Докажем, что в любом стаде все коровы одноцветные.

База. Если в стаде одна корова, то все стадо одноцветное.

Шаг индукции. Пусть для любого стада с n коровами верно что стадо одноцветное. Рассмотрим стадо из $n + 1$ коровы. Назовем в нем двух коров Буренка и Незабудка, а оставшихся назовем просто «Стадо». Уберем на время Буренку. Осталось n коров, значит, по предположению Незабудка и «Стадо» одного цвета. Теперь уберем на время Незабудку, и аналогично получим что Буренка и «Стадо» одного цвета. Значит, все $n + 1$ корова одного цвета.

4. На плоскости проведено несколько прямых. Докажите, что части, на которые эти прямые делят плоскость, можно раскрасить в два цвета так, чтобы любые две соседние части были окрашены в разные цвета
5. Пиццу разрезали прямолинейными разрезами на несколько кусков. Оказалось, что одна сторона у ножа была грязная. Докажите, что всегда найдётся хотя бы один чистый кусок.
6. В прямоугольнике $3 \times n$ расставлены фишки трех цветов по n каждого цвета. Докажите, что переставляя фишки в строчках, можно сделать так, чтобы в каждом столбце все три фишки стали разными.