[Школа №444]

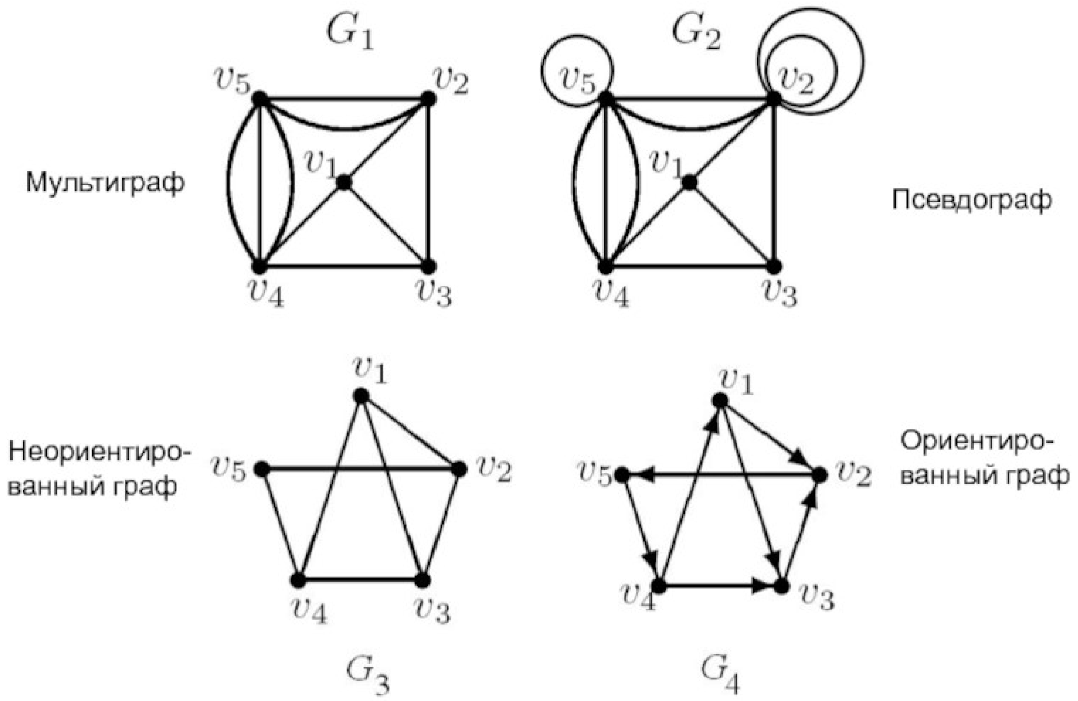
[*2021-2022 г.*] группа: мега 8 *13.10.2020 г.*

Графы.

Определение 1.

Графом G (V,E) называется множество точек (вершин: V), некоторые из которых соединены отрезками (рёбрами: E). Причём обычно речь идет о графе без кратных рёбер (то есть между 2-мя вершинами ровно 1 ребро), без ориентации (нет направления, в котором возможно движение по этому ребру) и без петель (ребро, имеющее начало и конец в одной точке называется **петля**).

1. Если в графе есть кратные рёбра, то такой граф называется **мультиграф**
2. Если в графе есть ориентация, то такой граф называется **ориентированным**
3. Если есть петля - **псевдограф**



Определение 2.

Степенью вершины называют количество рёбер, выходящих из данной вершины.

Теорема.

Число рёбер в графе равно половине от суммы степеней вершин.

Доказательство

Мы знаем, что степень вершины - это количество рёбер, выходящих из каждой вершины. Найдем сумму степеней всех вершин графа. Заметим, что ребро соединяет ровно две вершины, а значит мы посчитали каждое ребро дважды. Поэтому сумму степеней нужно ещё поделить на два.

ЧТД

Лемма о рукопожатиях.

В любом графе число вершин с нечётной степенью чётно.

Доказательство

Из предыдущей теоремы мы знаем, что количество рёбер графа равно половине суммы степеней его вершин.

Так как количество рёбер должно быть целым числом, то сумма степеней вершин должна быть чётной.

А это возможно только в том случае, если граф содержит чётное число нечётных вершин.

ЧТД

Примеры

1. В стране Придуманная ровно 16 городов. Каждый город соединяется ровно с пятью другими городами. Сколько дорог в данной стране?
2. В шахматном турнире приняло участие ровно 8 учащихся 8-ых классов. Известно, что каждый сыграл с каждым. Сколько игр было сыграно в данном турнире?
3. Барон Мюнхгаузен сказал, что он недавно посетил пышный балл Анны Леопольдовны, где собрались 111 мужчин и каждый пожал руку ровно 11 другим. Не ошибся ли барон?

Задачи

1. Существует ли граф на 8-ми вершинах, степени которого равны:
(а) 8, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2; **(б)** 7, 7, 6, 5, 4, 2, 2, 1; **(в)** 6, 6, 6, 5, 5, 3, 2, 2?

2. В графе из каждой вершины выходит по 11 ребер. Может ли в нём быть 2114 рёбер?

3. На субботний кружок по математике пришло 15 человек. Может ли случиться так, что каждая девочка знакома ровно с тремя из присутствующих на паре мальчиков, а каждый мальчик ровно с пятью девочками?

4. В городе Воображаемый 17 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы было четыре телефона, каждый из которых соединен с тремя другими, восемь телефонов, каждый из которых соединен с шестью, и пять телефонов, каждый из которых соединен с тремя другими?

5. Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

6. На клетчатом листе закрасили 25 клеток. Может ли каждая из них иметь нечётное число закрашенных соседей?