

## Остатки

**Деление с остатком.** Для любых целых чисел  $a$  и  $b$ , причём  $b \neq 0$ , найдётся единственная пара целых чисел  $q$  и  $r$ , таких что  $a = q \cdot b + r$ , где  $0 \leq r < |b|$ .

1. Докажите, что число  $1000 \cdot 1001 \cdot 1002 \cdot 1003 - 24$  делится:
  1. На 999
  2. На 1004
2. Делится ли число  $10^{2002} + 8$  на 9?
3. Докажите, что  $2^{50} + 1$  делится на 125.
4. (а) Докажите, что для нечетного  $n$  число  $n^2 + 3$  делится на 4.  
(б) Докажите, что  $x^3 + 5x$  делится на 3 при любом  $x$ .  
(в) Докажите, что  $n^5 - n^3$  делится на 8.
5. (а) Натуральные числа  $x, y, z$  таковы, что  $x^2 + y^2 = z^2$ . Докажите, что хотя бы одно из них делится на 3.  
(б) Натуральные числа  $x, y, z$  таковы, что  $x^2 + y^2 = z^2$ . Докажите, что  $x \cdot y$  делится на 12.
6. Является ли простым число  $2011 \cdot 2111 + 2500$ ?
7. Докажите, что при любом натуральном  $n$  число  $16^{n+2} + 23^{n+1} + 37^n$  делится на 7.
8. Докажите, что  $11^{n+2} + 12^{2n+1}$  делится на 133 при натуральных  $n$ .