

## Индукция 2. Тождества и делимость

### Разбор.

(а) Докажите тождество для любого натурального  $n$ :  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

(б) Докажите, что при любом натуральном  $n$ ,  $n^3 + 3n^2 + 5n + 3$  делится на 3.

1. Докажите следующие тождества:

(а)  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1) \cdot n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$

(б)  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$

2. Придумайте и докажите формулу

(а)  $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = ?$

(б)  $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = ?$

(в)  $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n-1}{n!} = ?$

(г)  $1 \times 1! + 2 \times 2! + \dots + n \times n! = ?$

3. Докажите, что:

(а)  $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$  делится на 19.

(б)  $7^{2n} - 1$  делится на 24.

(в)  $3^{2n+2} + 8^n - 9$  делится на 16.

(г)  $n^3 + 5n$  делится на 6.

(д)  $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$  делится на 9.

4. Докажите, что если в числе 12008 между нулями вставить любое количество троек, то получится число, делящееся на 19.