

## Метод математической индукции.

Часто требуется доказать утверждение типа: «Для каждого натурального  $n$  верно, что ...». Такое утверждение можно рассматривать, как цепочку утверждений «Для  $n = 1$  верно, что ...», «Для  $n = 2$  верно, что ...» и т.д.

*Метод математической индукции* состоит в том, чтобы доказать первое из этих утверждений (называемое **базой** или основанием индукции), что обычно достаточно просто сделать, а затем доказать **шаг** (или **переход**) индукции: «Если верно утверждение с номером  $k$ , то верно утверждение с номером  $(k + 1)$ ».

Если верна база индукции и верен шаг индукции, то все утверждения верны.

- 1. На столе стоят **(а)** 2 **(б)** 8 стаканов с водой. Разрешается взять любые два стакана и уравнивать в них количества воды, перелив часть воды из одного стакана в другой. Докажите, что с помощью таких операций можно добиться того, чтобы во всех стаканах было поровну воды.
0. Головоломка «**Ханойские башни**» представляет собой  $N$  дисков, нанизанных в порядке уменьшения размеров на один из трех колышков. Требуется переместить всю башню на другой колышек, перенося каждый раз только один диск и не помещая больший диск на меньший. Докажите, что головоломка имеет решение для  
**(а)**  $N = 4$ ;  
**(б)**  $N = 5$ .
1. Решите задачу -1 для  $2^n$  стаканов с водой для произвольного  $n$ .
2. Решите задачу 0 для произвольного  $N$ .
3. Докажите тождества *методом математической индукции*:  
**(а)**  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$   
**(б)**  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$ .  
**(в)**  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ;
4. Докажите неравенство для любого  $n$ : **(а)**  $2^n > n$ ; **(б)**  $3^n > n \cdot 2^n$ .
5. Любую ли сумму из целого числа рублей больше семи, можно уплатить без сдачи денежными купюрами по 3 и 5 рублей?
6. Несколько прямых делят плоскость на части. Докажите, что эти части можно раскрасить в 2 цвета так, что граничащие части будут иметь разный цвет.
7. На какую максимальную степень тройки делится число, десятичная запись которого состоит из  $3n$  единиц?