

Графы-1

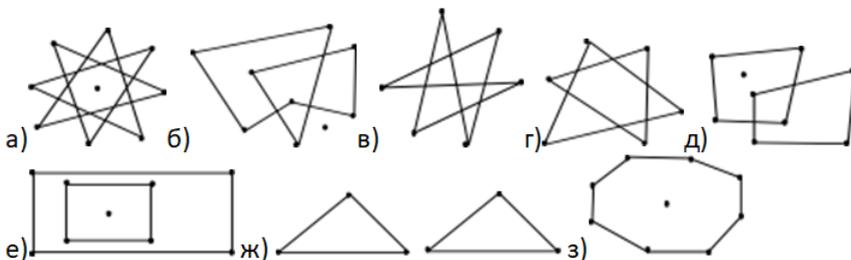
Граф – это множество точек (для удобства изображения — на плоскости) и попарно соединяющих их линий (не обязательно прямых). Точки называются **вершинами**, линии – **рёбрами**. В графе важен только факт наличия связи между двумя вершинами. От способа изображения этой связи структура графа не зависит.

Степень вершины – количество выходящих из неё рёбер.

Компонента связности графа – это максимальный подграф (часть графа), который является связным. У связного графа всего одна компонента связности – он сам.

Два графа считаются **одинаковыми**, если вершины каждого из них можно пронумеровать так, чтобы если в одном из графов i -я вершина была связана ребром с j -й, то в другом – тоже.

1. Укажите все одинаковые графы.



2. Между 9 планетами солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по маршрутам: Земля - Меркурий, Плутон - Венера, Земля - Плутон, Плутон - Меркурий, Меркурий - Венера, Уран - Нептун, Нептун - Сатурн, Сатурн - Юпитер, Юпитер - Марс и Марс - Уран. Можно ли добраться с Земли до Марса?
3. Могут ли степени вершин в графе быть равны:
 - (а) 8, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2?
 - (б) 7, 7, 6, 5, 4, 2, 2, 1?
 - (в) 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0?
4. Петя заметил, что у всех его 25 одноклассников различное число друзей в этом классе. Сколько друзей у Пети? (Укажите все решения)
5. В стране 15 городов, каждый из которых соединен авиалиниями не менее, чем с 7 другими. Докажите, что из любого города можно самолетом добраться до любого другого (возможно, с пересадками).

6. На кружке каждый мальчик знаком ровно с десятью девочками, а каждая девочка — ровно с девятью мальчиками. Кого больше: мальчиков или девочек?
7. **Докажите, что сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному количеству рёбер** (важное следствие: сумма степеней вершин графа всегда чётна).
8. В некотором государстве 100 городов, из которых выходит по 3 дороги, и 100 городов, из которых выходит по 4 дороги. Сколько дорог всего?
9. Страна называется пятёрочной, если в ней каждый город соединён авиалиниями ровно с пятью другими городами (международных рейсов нет).
 - (а) Нарисуйте схему авиалиний для пятёрочной страны из 10 городов.
 - (б) Сколько авиалиний в пятёрочной стране из 50 городов?
 - (в) Может ли существовать пятёрочная страна, в которой ровно 46 авиалиний?