

## Пара важных формул

**Обязательно запомните эти формулы!**

Формула разности квадратов:  $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ .

Формула квадрата суммы:  $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ .

Формула квадрата разности:  $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ .

Также запомните как выглядят эти формулы, когда вместо одной из этих переменных стоит число 1:

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1); \quad (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1; \quad (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1.$$

1. Пусть  $a, b$  два натуральных числа. Известно, что  $a^2$  делится на  $(a - b)$ . Докажите, что тогда  $b^2$  тоже делится на  $(a - b)$ .
2. Найдите все натуральные  $x, y$ , такие что:  
(а)  $x^2 - y^2 = 17$ .  
(б)  $x^2 - y^2 = 303$ .
3. Известно, что число  $a^n - 1$ , где  $a, n$  – натуральные и  $a > 2$ , является простым. Докажите, что  $n$  нечётное.
4. Докажите, что число  $1 \underbrace{0\dots0}_{100} 2 \underbrace{0\dots0}_{100} 1$  является квадратом какого-то натурального числа.
5. Докажите, что число  $2000000^2 - 3999999$  составное.
6. Пусть  $a = b + 1$ . Докажите, что:

$$a^{64} - b^{64} = (a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)(a^8 + b^8)(a^{16} + b^{16})(a^{32} + b^{32}).$$