Принципиальный листик

Принцип крайнего

Мысль 1: Во многих задачах бывает полезно начинать рассуждения рассматривая что-то самое большое или маленькое, самое длинное или короткое, самое левое или правое, одним словом что-то "крайнее".

Пример: В каждой клетке шахматной доски записано число. Оказалось, что любое число равно среднему арифметическому соседних (по стороне) чисел. Докажите, что все числа равны.

1. По кругу выписано несколько натуральных чисел, каждое из которых не меньше одного из соседних с ним. Докажите, что среди этих чисел точно есть хотя бы два равных.

2. Все семиклассники бегают по футбольному полю с шишкой в руке. По свистку они останавливаются, и каждый кидает шишкой в ближайшего к нему семиклассника (все расстояния между ребятами попарно различны). Докажите, что какие то два кинут шишки друг в друга.

3. На шахматной доске стоят несколько ладей. Докажите, что найдется ладья, бьющая: **(а)** не более трех других; **(б)** не более двух других. (Перепрыгивать через другие фигуры ладья не может.) **(в)** На шахматной доске стоит несколько ферзей. Верно ли, что найдется ферзь, бьющий не более трех других?

4. Можно ли некоторые клетки белой доски 9×9 покрасить в черный цвет так, чтобы каждая клетка (как белая, так и черная) граничила по стороне ровно с двумя черными клетками?

5. В стране есть несколько городов и несколько дорог с односторонним движением. Каждая дорога соединяет два города и не проходит через остальные. При этом, какие бы два города ни взять, хотя бы из одного из них можно проехать в другой,не нарушая правил движения. Докажите, что найдется город, из которого можно проехать в любой другой, не нарушая правил движения

Принцип узких мест

Мысль 2: В прошлых задачах нечто "крайнее" было тем местом задачи, где у нас была наименьшая свобода выбора – это помогало нам доказать то, что нужно, либо прийти к противоречию. Однако таким "узким" местом может быть не обязательно что-то крайнее. В последующих задачах постарайтесь найти такие места, которые доставляют больше всего проблем, и отталкивайтесь от них.

6. **(а)** Можно ли натуральные числа от 1 до 99 выписать в строку так, чтобы разность любых двух соседних была не меньше 50? **(б)** Тот же вопрос для чисел от 1 до 100?

7. Можно ли расставить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 20 в строку так, чтобы в каждой паре соседних одно из чисел делилось на другое?

8. Кубик Рубика $3 \times 3 \times 3$ надо распилить на единичные кубики. После распила части можно перекладывать и прикладывать так, чтобы можно было пилить несколько частей одновременно. Какое наименьшее число распилов нам понадобится?