Принцип крайнего

Мысль 1: Во многих задачах бывает полезно начинать рассуждения рассматривая что-то «крайнее». В данном листочке вам могут быть полезны такие крайние:

- самое большое, самое маленькое;
- самое короткое, длинное;
- самое левое (самое правое, верхнее, нижнее);
- крайнее по порядку - первое, последнее.

Примеры:

1. В каждой клетке шахматной доски записано число. Оказалось, что любое число равно среднему арифметическому соседних (по стороне) чисел. Докажите, что все числа равны.
2. Шахматная доска разбита на доминошки. Докажите, что какие-то две доминошки образуют квадрат.

Задачи:

1. По кругу выписано несколько натуральных чисел, каждое из которых не меньше одного из соседних с ним. Докажите, что среди этих чисел точно есть хотя бы два равных.

2. Все семиклассники бегают по футбольному полю с шишкой в руке. По свистку они останавливаются, и каждый кидает шишкой в ближайшего к нему семиклассника (все расстояния между ребятами попарно различны). Докажите, что какие то два кинут шишки друг в друга.

3. На шахматной доске стоят несколько ладей. Докажите, что найдется ладья, бьющая: **(а)** не более трех других; **(б)** не более двух других. (Перепрыгивать через другие фигуры ладья не может.) **(в)** На шахматной доске стоит несколько ферзей. Верно ли, что найдется ферзь, бьющий не более трех других?

4. Чеширский Кот ходит по клетчатой доске на одну клетку по вертикали или горизонтали. Попав в очередную клетку, он либо красит себя в цвет клетки, либо красит клетку в свой цвет. Пурпурный Кот оказался на желтой доске размера 2021×2021. Сможет ли он раскрасить её в шахматном порядке?

Принцип узких мест

Мысль 2: В прошлых задачах нечто «крайнее» было тем местом задачи, где у нас была наименьшая свобода выбора – это помогало нам доказать то, что нужно, либо прийти к противоречию. Однако таким «узким» местом может быть не обязательно что-то крайнее. В последующих задачах постарайтесь найти такие места, которые доставляют больше всего проблем, и отталкивайтесь от них.

Задачи:

5. **(а)** Можно ли натуральные числа от 1 до 99 выписать в строку так, чтобы разность любых двух соседних была не меньше 50? **(б)** Тот же вопрос для чисел от 1 до 100?

6. Можно ли расставить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 20 в строку так, чтобы в каждой паре соседних одно из чисел делилось на другое?

7. Кубик Рубика $3 \times 3 \times 3$ надо распилить на единичные кубики. После распила части можно перекладывать и прикладывать так, чтобы можно было пилить несколько частей одновременно. Какое наименьшее число распилов нам понадобится?