

4. Бесконечность

1. Докажите, что из любых 11 бесконечных десятичных дробей можно выбрать две, совпадающие в бесконечном числе позиций.

2. Дана последовательность, в которой для любого натурального n сумма n первых членов больше n . Докажите, что в этой последовательности бесконечно много положительных членов.

3. Круг разделен на 2021 сектор, и в каждом написано натуральное число. В один из секторов ставится фишка. Каждым ходом прочитывается число в секторе где фишка, фишка сдвигается на это число секторов по часовой стрелке, и там, где она остановилась, число увеличивается на 1. Докажите, что через некоторое число ходов все числа станут больше миллиона.

4. Назовем полосой часть плоскости, расположенную между двумя параллельными прямыми. Можно ли покрыть плоскость конечным числом полос?

5. Можно ли разбить бесконечную клетчатую доску на домино так, чтобы каждая линия сетки разрезала пополам лишь конечное число доминошек?

6. Есть несколько геометрических прогрессий, состоящих из натуральных чисел. Может ли случиться, что каждое натуральное число входит в одну из них?

7. В круге радиуса 1 расположено бесконечно много кругов радиуса $0,1$. Докажите, что найдётся:

(а) точка, содержащаяся в бесконечном числе этих кругов;

(б) круг радиуса $0,01$, содержащийся в бесконечном числе этих кругов.

8. Известно, что человечество бессмертно, а каждый человек смертен. Число людей в каждом поколении (поколения считаются от Адама по мужской линии) конечно. Докажите, что найдётся бесконечная мужская цепочка, начинающаяся с Адама.

9. Докажите, что в бесконечной последовательности попарно различных натуральных чисел, больших единицы, найдётся бесконечное количество чисел, больших своего номера в этой последовательности.