$$a \equiv b \pmod{a-b}.$$

**Комментарий от Капитана Кэпа.** *Вспомните определение сравнения по модулю. А затем ещё раз взгляните на соотношение, вынесенное в качестве заглавия этого листочка. Осознайте его. Насладитесь им. Пропустите его через себя, чтобы его гениальность достигла каждого нейрона в вашем мозге. Пошлите лучи добра Дмитрию Владимировичу, который поделился с вами этим шедевром простоты и изящества. Сделайте глубокий вдох. А затем приступайте к решению задач.*

**1.** Известно, что $a+2c$ и $b+3d$ делятся на 7. Докажите, что $ab-6cd$ делится на 7.

**2.** Докажите, что $3^{100}-2^{100}$ делится на $3^{10}+2^{10}$.

**3.** Для какого наибольшего натурального числа $n$ число $n^3+7n^2-2n+100$ делится на число $n+10$?

**4.** Докажите, что $(3^n+1)^n-2$ делится на $3^n-2$.

**5.** Дано простое число $p$ и такие целые числа $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, что числа $a^2-b$, $a^3-c$, $c^5-d$, $b^7-e$ делятся на $p$. Докажите, что и число $ae-d$ делится на $p$.

**6.** Пусть $n$, $m>2$ — натуральные числа. Докажите, что $2^n+1$ не делится на $2^m-1$.

**7.** $a$, $b$, $c$, $d$ — такие натуральные числа, что $ac+bd$ делится на $a^2+b^2$. Докажите, что $(a^2+b^2, c^2+d^2) \neq 1$.

**8.** Пусть $a$ — натуральное число. Докажите, что число

$$(a^2+1)^3+2(a^2+1)^6+\ldots+2n(a^2+1)^{6n}$$

делится на $a^2-a+1$ тогда и только тогда, когда $n$ делится на $a^2-a+1$.