2. Принцип отражения

В этом листочке мы будем рассматривать все пути из точки $(0,0)$*, состоящие из* $2n$ *отрезков, идущих по диагоналям клеток вправо-вверх или вправо-вниз.*

1. *Принцип отражения.* Докажите, что количество путей с концом в точке $(2n,-2)$, равно количеству путей с концом в $(2n,0)$, имеющих точки в нижней полуплоскости.

2. Докажите, что

$$c_n = C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n-1}.$$

3. Докажите, что количество путей, не пересекающих ось абсцисс (кроме начала пути), равно количеству путей, не имеющих точек в нижней полуплоскости.

4. Докажите, что количество путей, не пересекающих ось абсцисс (кроме начала пути), равно количеству путей с концом в точке $(2n,0)$.

5. а) Пусть $k>0$. Обозначим за A_k количество путей, пересекающих (хотя бы в одной точке) линию $y=k$, за B_k — количество путей, оканчивающихся не ниже линии $y=k$, а за C_k — количество путей, оканчивающихся на линии $y=k$. Докажите, что $A_k = 2B_k - C_k$.

6. Пусть $k>0$. Докажите, что путей, имеющих максимум $y=k$, столько же, сколько путей, оканчивающихся в точке $(2n,k)$ или $(2n,k+1)$.

7. Обозначим за p_k количество путей, пересекающих ось абсцисс ровно $k+1$ раз, включая обязательное пересечение в начале пути и возможное пересечение в конце пути.

a) Докажите, что $p_0 = p_1$,

b) Докажите, что $p_1 > p_2 > \ldots > p_n$.

8. Обозначим за D_k число путей с концом в точке $(2n,0)$, имеющих ровно $2k$ ходов в нижней полуплоскости $(0 \le k \le n)$.

a) Докажите, что все числа D_k равны.

b) Докажите, что они равны c_n.