

1. Числа Каталана

Определение. Числами Каталана называется последовательность, которая задаётся рекуррентным соотношением

$$c_0 = 1, \quad c_{n+1} = c_0c_n + c_1c_{n-1} + \dots + c_{n-1}c_1 + c_nc_0.$$

1. Докажите, что количество правильных скобочных последовательностей из n открывающих и n закрывающих скобок есть c_n .

2. Рассмотрим все пути из точки $(0, 0)$ в $(2n, 0)$, идущие по диагоналям клеток вправо-вверх или вправо-вниз. Выберем среди них такие, которые не опускаются ниже прямой $y = 0$. Докажите, что количество таких путей есть c_n .

3. Докажите, что число способов расставить числа от 1 до $2n$ в таблице $2 \times n$ так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце числа были расположены по возрастанию, равно c_n .

4. В окружность вписан правильный $2n$ -угольник. Докажите, что количество способов попарно соединить вершины этого многоугольника так, чтобы проведенные отрезки не пересекались, равно c_n .

5. Начальник издаёт n приказов (последовательно с номерами от 1 до n). Выпустив приказ, он кладёт его поверх стопки из предыдущих приказов. Время от времени к стопке подходит секретарша, берёт верхний приказ и несёт знакомить с ним сотрудников (соответственно, сотрудники знакомятся с приказами в какой-то последовательности). Докажите, что количество таких последовательностей равно c_n .

6. Докажите, что количество способов разбить $(n + 2)$ -угольник диагоналями на треугольники есть c_n . На рисунке показаны способы для $n = 3$.



7. Докажите, что

$$(n - 1)c_n = \frac{n + 2}{2} (c_1c_{n-1} + c_2c_{n-2} + \dots + c_{n-1}c_1).$$

8. Докажите, что

$$c_{n+1} = \frac{4n + 2}{n + 2} c_n.$$

9. Докажите, что

$$c_n = \frac{1}{n + 1} C_{2n}^n.$$