Инвариант

1. Даны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. Разрешается к любым двум из них прибавлять единицу. Можно ли все числа сделать равными?
2. В начальный момент все жуки сидели на клетках. По команде все жуки перелетели на соседнюю клетку. Докажите, что хотя бы одна клетка стала пустой.
3. Перед утренней парой Александр Андреевич заварил кружку кофе и поставил рядом такую же кружку молока. Одну ложку молока он перелил в кружку с кофе и тщательно перемешал. После этого такую же ложку смеси из первой кружки он переливает во вторую. Такую операцию он проделывает 444 раза, после чего в обеих кружках оказывается одинаковое количество жидкости. Чего больше: молока в кофе или кофе в молоке?

Задачи

1. В памяти Альтрона записано число 2023. За одну операцию Альтрон может прибавить к имеющемуся число 10, поменять цифры в разряде десятков и сотен местами, а также умножить умножить имеющееся число на 11. Может ли Альтрон за несколько ходов добиться того, чтобы в его памяти оказалось записано число 20233202?

2. В таблице 100×100 стоят символы «+» и «-». Всюду, кроме двух главных диагоналей, стоят знаки «+». На диагоналях стоят знаки «-». Разрешается менять все знаки в одном столбце или строке на противоположные. Можно ли сделать так, что во всей таблице стоят одинаковые знаки?

3. Питер Квилл и Тор, выясняя в очередной раз, кто из них капитан Бенатара, решили раз и навсегда это выяснить, сыграв в игру. В начале по кругу стоят числа 1, 2, 3, 4. Каждым своим ходом первый прибавляет к двум соседним числам по 1, а второй меняет любые два соседних числа местами. Первым ходит Квилл. Он выигрывает, если все числа станут равными. Может ли Тор ему помешать?

4. Правильный треугольник со стороной 3 разбит на девять треугольных клеток. В этих клетках изначально записаны нули. За один ход можно выбрать два числа, находящиеся в соседних по стороне клетках, и либо прибавить к обоим по единице, либо вычесть из обоих по единице. Александр Андреевич хочет совершить несколько ходов так, чтобы после них в клетках оказались записаны в некотором порядке последовательные натуральные числа $n, n+1, \dots, n+8$. При каких n он сможет это сделать?

5. Четыре паука сидели в вершинах квадрата. Каждую секунду один из пауков прыгает через другого в симметричную точку. Могут ли они оказаться на:

1. одной прямой, параллельной стороне квадрата;
2. на одной произвольной прямой?

6. На длинном камне сидели джедай и ситх. К ним по одному подошли ещё 20 человек, и каждый из них садился между какими-то двумя уже сидящими. Назовём джедая смелым, если он садится между двумя соседними ситхами, а ситха смелым, если он садился между двумя соседними джедаями. Когда все сели, оказалось, что джедаи и ситхи сидят на камне, чередуясь. Сколько среди них было смелых?

7. На компьютере написали код. Он считывает с экрана пару чисел (a, b) и «индикатор» c. Если $c = 0$, то код выдаёт пару (b, a) и ждёт нового индикатора. Если $c = 1$, то код выдаёт пару $(a, a + b)$ и ждёт индикатора. Можно ли при помощи этого кода получить из карточки $(1, 1)$ карточку $(123321, 1001)$?

8. На доске написаны числа $1, 2, \dots, 10$. Разрешается взять любые три числа a, b и c и заменить их числами $\frac{ab}{c}$, $\frac{bc}{a}$, $\frac{ac}{b}$. Можно ли с помощью таких операций получить на доске числа $2, 3, \dots, 11$?