

Неравенства-2

Транснеравенство:

Пусть $x_1 \geq \dots \geq x_n, y_1 \geq \dots \geq y_n, i_1, \dots, i_n = 1, \dots, n$. Тогда

$$x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \geq x_1 y_{i_1} + \dots + x_n y_{i_n} \geq x_1 y_n + \dots + x_n y_1.$$

Неравенство Чебышева:

Пусть $x_1 \geq \dots \geq x_n, y_1 \geq \dots \geq y_n$. Тогда

$$\frac{x_1 y_1 + \dots + x_n y_n}{n} \geq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \frac{y_1 + \dots + y_n}{n} \geq \frac{x_1 y_n + \dots + x_n y_1}{n}.$$

- Доказать, что $2^{n-1}(a^n + b^n) > (a + b)^n$, где $n > 1, n \in \mathbb{N}, a + b > 0, a \neq b$.
- Какое из чисел больше: $100500 \cdot 444 + 2021 \cdot 2022 + 1234 \cdot 9000$ или $100500 \cdot 2022 + 9000 \cdot 2021 + 1234 \cdot 444$? Посчитанный на калькуляторе или (ну вдруг найдётся смелый) вручную ответ не засчитается!
- a, b, c — положительные числа. Докажите неравенство:

$$a \cdot 2^a + b \cdot 2^b + c \cdot 2^c \geq a \cdot 2^b + b \cdot 2^c + c \cdot 2^a.$$

- x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — положительные числа. Докажите неравенство:

$$\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \frac{x_3^2}{x_4} + \frac{x_4^2}{x_5} + \frac{x_5^2}{x_1} \geq x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5.$$

- a, b, c — положительные числа. Докажите неравенство

$$a + b + c \geq \frac{a(b+1)}{a+1} + \frac{b(c+1)}{b+1} + \frac{c(a+1)}{c+1}.$$

- Пусть a, b, c — стороны треугольника, а α, β, γ — соответствующие углы того же треугольника. Докажите неравенство:

$$\alpha a + \beta b + \gamma c \geq \frac{1}{2}(ab + \beta c + \gamma b + \alpha c + \beta a + \gamma a).$$

- Докажите неравенство Чебышева.