

## Индукция

*Высокоактивный социопат не знал, чем он пользуется*

1. Головоломка «Ханойские башни» представляет собой  $N$  дисков, нанизанных в порядке уменьшения размеров на один из трех колышков. Требуется переместить всю башню на другой колышек, перенося каждый раз только один диск и не помещая больший диск на меньший. Докажите, что головоломка имеет решение.
2. Докажите, что  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ .
3. Пиццу разрезали прямолинейными разрезами на несколько кусков. Оказалось, что одна сторона у ножа была грязная. Докажите, что всегда найдётся хотя бы один чистый кусок.
4. Докажите, что при любом натуральном  $n$   $n^3 + 3n^2 + 5n + 3$  делится на 3.
5. Доказать тождества:
  - $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ;
  - $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ;
  - $1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + (n - 1) \times n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$ .
  - $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$ .
6. Треугольник разбит на несколько частей несколькими прямыми. Докажите, что хотя бы одна из частей является треугольником.
7. Несколько прямых делят плоскость на части. Доказать, что можно раскрасить эти части в белый и чёрный цвет так, чтобы соседние части (имеющие общий отрезок границы) были разного цвета.
8. На полке стоит 55 комиксов DC. За раз разрешается взять несколько подряд идущих комиксов и переставить их в обратном порядке. Докажите, что такими операциями можно расставить тома по порядку.
9. Докажите, что число, состоящее из  $3^n$  единиц, делится на  $3^n$ .