Метод математической индукции

Часто требуется доказать утверждение типа: *«Докажите, что для всех натуральных n верно, что ...»*. Такое утверждение можно рассматривать, как цепочку утверждений «Для $n = 1$ верно, что ...», «Для $n = 2$ верно, что ...» и т.д.

Метод математической индукции состоит в том, чтобы доказать первое из этих утверждений (называемое **базой** индукции), а затем доказать индукционный **переход**. Переход бывает двух видов:

«Если верно утверждение с номером $k - 1$, то верно утверждение с номером k)». «Если верны все утверждения с номерами, меньшими k, то верно утверждение с номером k» Если верна база индукции и верен шаг индукции, то все утверждения верны.

1. Докажите тождества:
(а) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.
(б) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

2. Докажите неравенство для любого n: $3^n > n \cdot 2^n$.

3. Несколько прямых делят плоскость на части. Докажите, что эти части можно раскрасить в 2 цвета так, что граничащие части будут иметь разный цвет.

4. **(а)** Докажите, что равносторонний треугольник можно разрезать на 1000 равносторонних треугольников.
(б) Докажите, что квадрат можно разрезать на любое число квадратов (не обязательно одинаковых), начиная с шести.

5. На полке в беспорядке стоит собрание сочинений в N томах. Библиотекарь может вынуть любую группу стоящих подряд томов и поставить их на то же место в обратном порядке. Как ему не более чем за $N - 1$ таких операций расставить тома строго по порядку?

6. В строку в беспорядке записаны по разу числа $1, 2, 3, \ldots, N$. За один ход разрешается поменять местами два числа, отличающиеся ровно на 1 (например, поменять местами 5 и 6, где бы они ни стояли). Докажите, что числа можно расставить по возрастанию не более чем за $N(N - 1)/2$ ходов.

7. **(а)** Докажите, что $2^{2n-1} + 3n + 4$ делится на 9 при любом n.
(б) $x + \frac{1}{x}$ — целое число. Докажите, что тогда, что для любого натурального n верно, что $x^n + \frac{1}{x^n}$ — тоже целое число.
(в) Докажите **неравенство Бернулли**:
если $x \geqslant -1$ и n – натуральное число, то $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.