

Остатки-2

1. Найдите остаток от деления 5^{444} на 6.
2. (а) Найдите последнюю цифру числа $1 + 2 + \dots + 99$
(б) Найдите последнюю цифру числа $1^2 + 2^2 + \dots + 99^2$
(в) Найдите остаток от деления на 7 числа $10^{10} + 10^{100} + 10^{1000} + \dots + 10^{10000000000}$
3. Докажите, что если выписывать остатки от деления a^n на b для фиксированных натуральных a и b и $n = 1, 2, \dots$, то в какой-то момент они начнут повторяться.
4. (а) Числа A и B таковы, что AB делится на 7. Верно ли, что одно из этих чисел обязательно делится на 7?
(б) Числа A и B таковы, что AB делится на 15. Верно ли, что одно из этих чисел обязательно делится на 15?
(в) Число A^2 делится на 11. Верно ли, что A^2 делится на 121?
(г) Число A^2 делится на 12. Верно ли, что A^2 делится на 144?
5. Сумма двух цифр a и b делится на 7. Докажите, что и число \overline{aba} тоже делится на 7.
6. Докажите, что среди 501 целого числа найдутся два, квадраты которых дают одинаковые остатки при делении на 1000.