

Делимость и инварианты

1. На математическом помогаторе есть только три кнопки: «умножить на 7», «прибавить 27» и «вычесть 12».
 - (а) Можно ли с помощью помогатора из числа 6 получить число 1?
 - (б) Какие числа можно получить из числа 6 с помощью помогатора?
2. В Триляляндии выпущены только монеты в 9, 15 и 33 динаров. Можно ли в Триляляндии купить что-нибудь за 50 динаров (возможно получив сдачу)?
3. В Чембурии выпущены монеты в 4, 8, 44 и 37 динаров. Петя хотел купить в автомате сок за 4 динара и бросил туда монету в 37 динаров. Оказалось, что автомат может выдавать сдачу только 4-динаровыми монетами. Какое наименьшее количество монет придётся ещё бросить в автомат, чтобы получить сок и сдачу?
4. Федя купил несколько воздушных шариков – красные по 7 рублей за штуку, а синие по 2 рубля за штуку. Зайдя в магазин назавтра, он обнаружил, что цены шариков поменялись местами: красные стали стоить 2 рубля, а синие 7 рублей. Увидев такое, Федя сказал с досадой: «Покупай я те же шарики сегодня, сэкономил бы 107 рублей». Докажите, что он неправ.
5. У Никиты есть очень много карточек, на каждой из которых написано одно из чисел 7, 21, 84 или 119. Никита приставляет несколько карточек друг к другу и получает числа. Например, он может получить число 217 или 84721119119. Никита сложил несколько полученных чисел. Докажите, что у него получилось число, которое делится на 7.
6. В клетках прямоугольника 5×13 расставлены натуральные числа так, что сумма чисел в каждой из восьми строк оказалась равна 1000. Может ли оказаться, что в каждом из тринадцати столбцов суммы чисел также равны между собой?
7. В шести коробках лежат шарики, ролики и кубики. Количество шариков в каждой из коробок равно количеству роликов во всех остальных коробках вместе взятых. Количество роликов в каждой из коробок равно количеству кубиков во всех остальных коробках вместе взятых. Докажите, что общее количество предметов в коробках делится на 31.
8. На столе лежат три кучки камней: в первой 51 камень, во второй 49 камней, а в третьей 5 камней. Разрешается выполнять следующие операции:
 - (а) объединить любые две лежащие на столе кучки в одну.
 - (б) если в какой-то из имеющихся кучек чётное число камней, то разделить её на две одинаковые кучки. Какое наибольшее количество кучек можно получить такими операциями?