Поворот

0. **Точка Торричелли.** Внутри остроугольного треугольника ABC отмечена точка T такая, что $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120°$. А также отмечена произвольная точка X. Докажите, что

$$AT + BT + CT < AX + BX + CX.$$

1. На биссектрисе AL треугольника ABC, в котором $AL = AC$, выбрана точка K таким образом, что $CK = BL$. Докажите, что $\angle CKL = \angle ABC$.

2. Про четырехугольник $ABCD$ известно, что из сторон AB, BC и CD можно составить прямоугольный треугольник, в котором BC — гипотенуза. Кроме этого $\angle A = \angle D = 45°$. Найдите $\angle BMC$, где M — середина стороны AD.

3. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ выбраны точки P и Q соответственно таким образом, что

(а) $\angle PAQ = \angle QAD$. Докажите, что $AP = DQ + BP$.

(б) $\angle PAQ = 45°$. Докажите, что $PQ = BP + DQ$.

4. Внутри квадрата $ABCD$ взята произвольная точка P. Через вершины A, B, C, D проведены перпендикуляры к прямым PB, PC, PD, PA соответственно. Докажите, что эти перпендикуляры пересекаются в одной точке.

5. На катетах CA и CB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC выбраны точки D и E так, что $CD = CE$. Продолжения перпендикуляров, опущенных из точек D и C на прямую AE, пересекают гипотенузу AB в точках K и L. Докажите, что $KL = LB$.

6. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена медиана AA_1. На стороне AB взята точка D так, что отрезок CD перпендикулярен AA_1. Вычислите отношение $AD : DB$.

7. Дан правильный треугольник ABC. Прямая, параллельная прямой AC, пересекает прямые AB и BC в точках M и P соответственно. Точка D — центр правильного треугольника PMB, точка E — середина отрезка AP. Найдите углы треугольника DEC.

8. В треугольнике ABC проведены медиана CM и высота CH. Прямые, проведенные через произвольную точку P плоскости перпендикулярно CA, CM и CB, пересекают прямую CH в точках A_1, M_1 и B_1. Докажите, что $A_1M_1 = B_1M_1$.