# Геометрия из олимпиады Эйлера для Таранова

## Третьи задачи

**1.** В трапеции $ABCD$ точка $M$ — середина основания $AD$. Известно, что $\angle ABD = 90^\circ$ и $BC = CD$. На отрезке $BD$ выбрана точка $F$ такая, что $\angle BCF = 90^\circ$. Докажите, что $MF \perp CD$.

**2.** На боковых сторонах $AB$ и $AC$ равнобедренного треугольника $ABC$ выбраны точки $P$ и $Q$ соответственно так, что $PQ \parallel BC$. На биссектрисах треугольников $ABC$ и $APQ$, исходящих из вершин $B$ и $Q$, выбраны точки $X$ и $Y$ соответственно так, что $XY \parallel BC$. Докажите, что $PX = CY$.

**3.** Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка $E$ так, что $AE = DE$ и $\angle ABE = 90^\circ$. Точка $M$ — середина отрезка $BC$. Найдите угол $DME$.

## Четвертые задачи

**4.** Биссектрисы углов $A$ и $C$ трапеции $ABCD$ пересекаются в точке $P$, а биссектрисы углов $B$ и $D$ — в точке $Q$, отличной от $P$. Докажите, что если отрезок $PQ$ параллелен основанию $AD$, то трапеция равнобокая.

**5.** В треугольнике $ABC$ точки $M$ и $N$ — середины сторон $AC$ и $AB$ соответственно. На медиане $BM$ выбрана точка $P$, не лежащая на $CN$. Оказалось, что $PC = 2PN$. Докажите, что $AP = BC$.

**6.** В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы $ABC$ и $ADC$ прямые. На сторонах $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ взяты точки $K$, $L$, $M$, $N$ соответственно так, что $KLMN$ — прямоугольник. Докажите, что середина диагонали $AC$ равноудалена от прямых $KL$ и $MN$.

**7.** На стороне $AC$ треугольника $ABC$ выбрана точка $D$ такая, что $BD = AC$. Медиана $AM$ этого треугольника пересекает отрезок $BD$ в точке $K$. Оказалось, что $DK = DC$. Докажите, что $AM + KM = AB$.

**8.** Серединные перпендикуляры к сторонам $AB$ и $BC$ выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекают стороны $CD$ и $DA$ в точках $P$ и $Q$ соответственно. Оказалось, что $\angle APB = \angle BQC$. Внутри четырёхугольника выбрана точка $X$ такая, что $QX \parallel AB$ и $PX \parallel BC$. Докажите, что прямая $BX$ делит диагональ $AC$ пополам.

**9.** Точки $M$ и $N$ — середины биссектрис $AK$ и $CL$ треугольника $ABC$ соответственно. Докажите, что угол $ABC$ прямой тогда и только тогда, когда $\angle MBN = 45^\circ$.