Геометрия из олимпиады Эйлера

Вторые задачи

1. Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC такова, что угол ABD — прямой и $BC+CD = AD$. Найдите отношение оснований $AD : BC$.

2. Дан остроугольный треугольник ABC. Высота AA_1 продолжена за вершину A на отрезок $AA_2 = BC$. Высота CC_1 продолжена за вершину C на отрезок $CC_2 = AB$. Найдите углы треугольника A_2BC_2.

3. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, причём прямая BE параллельна прямой CD и отрезок BE короче отрезка CD. Внутри пятиугольника выбраны точки F и G таким образом, что $ABCF$ и $AGDE$ — параллелограммы. Докажите, что $CD = BE + FG$.

4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ биссектриса угла B проходит через середину стороны AD, а $\angle C = \angle A + \angle D$. Найдите угол ACD

5. На биссектрисе AL треугольника ABC выбрана точка D. Известно, что $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ADC = 3\alpha$, $\angle ACB = 4\alpha$. Докажите, что $BC + CD = AB$.

Третьи задачи

6. На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбрана точка K так, что $AB = AK$. Отрезок AK пересекает биссектрису CL в ее середине. Найдите острые углы треугольника ABC.

7. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ такой, что $AD = AB + CD$. Оказалось, что биссектриса угла A проходит через середину стороны BC. Докажите, что биссектриса угла D также проходит через середину BC.

8. На отрезке AB отмечена точка M. Точки P и Q — середины отрезков AM и BM соответственно, точка O — середина отрезка PQ. Выберем точку C так, чтобы угол ACB был прямым. Пусть MD и ME — перпендикуляры, опущенные из точки M на прямые CA и CB, а F — середина отрезка DE. Докажите, что длина отрезка OF не зависит от выбора точки C.

9. В трапеции $ABCD$, где $AD \parallel BC$, угол B равен сумме углов A и D. На продолжении отрезка CD за вершину D отложен отрезок $DK = BC$. Докажите, что $AK = BK$.