11 Целая и дробная часть числа

Через $[x]$ обозначается целая часть числа x, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x. Например: $\left[\sqrt{2}\right]=1$; $[-3{,}75]=-4$.

Дробная часть числа (обозначается $\{x\}$) определяется соотношением как разность числа и его целой части $\{x\} = x-[x]$.

Дробная и целая части дроби $\frac{m}{n}$ связаны с делением с остатком следующим образом: $m=\left[\frac{m}{n}\right]n+\left\{\frac{m}{n}\right\}n$. То есть остаток от деления m на n равен $\left\{\frac{m}{n}\right\}n$, а неполное частное равно $\left[\frac{m}{n}\right]$.

1. Постройте график функции: а) $f(x)=[x]$; б) $f(x)=\{x\}$.
2. Какие значения может принимать сумма: а) $[x]+[-x]$; б) $\{x\}+\{-x\}$
3. Артём обозначил дни недели числами: 1 – понедельник, 2 – вторник, …, 6 – суббота, 0 – воскресенье. В ноябре первое число месяца было понедельником, и Артём вычислял день недели по формуле: $\textit{день недели}=7\cdot\left\{\frac{\textit{число}}{7}\right\}$. Как нужно изменить эту формулу в январе, когда первое число было субботой?
4. Найдите хотя бы одну пару действительных чисел x и y, для которых выполняется неравенство: а) $\frac{[x]+[y]}{2}<\left[\frac{x+y}{2}\right]$; б) $\frac{[x]+[y]}{2}>\left[\frac{x+y}{2}\right]$.
5. Найдите все положительные числа x такие, что $\left\{\frac{[x]}{x}\right\}+\left[\frac{\{x\}}{x}\right]=1$.
6. Найдите наименьшее число x, удовлетворяющее неравенству: $[x]\cdot\{x\}\ge 2022$
7. Пусть p и q – различные нечётные простые числа.
   Докажите, что $\left[\frac{p^q+q^p}{pq}\right]$ – чётное число.
8. Решите уравнение: $\left[x^2\right]-10[x]+24=0$
9. а) Существует ли такое натуральное число n, что $\left[\sqrt{n+2}\right]\left[\sqrt{n-2}\right]=n$?

   б) Существует ли такое натуральное число n, что $\left[\sqrt{n+15}\right]\left[\sqrt{n-14}\right]=n$?

   в) Найдите все натуральные числа. для которых $\left[\sqrt{n+75}\right]\left[\sqrt{n-74}\right]=n$