05 Китайская теорема об остатках. Теория

В предыдущем листке мы решали системы сравнений. При этом выяснилось, что у системы не всегда есть решение. Однако во всех системах, где модули были взаимно простыми, решение было. Например, у системы сравнений: $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 7 \\ x \equiv 5 \pmod{11} \\ x \equiv 2 \pmod 5 \end{cases}$ есть ровно одно решение по модулю 385 = 7×11×5. А именно $x \equiv 192 \pmod{385}$. То есть на отрезке от 1 до 385 включительно есть ровно одно число, имеющее данный набор остатков по модулям 5, 7 и 11. Докажем, что это не случайно.

Китайская теорема об остатках. Пусть даны n попарно взаимно простых чисел m_1, m_2, …, m_n; и n целых чисел r_1, r_2, …, r_n таких, что $0 \le r_i \le m_i - 1$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$ и $m=m_1m_2\ldots m_n$, тогда существует единственное целое число k такое, что $0 \le k \le m-1$ и $k \equiv r_i \pmod{m_i}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Другими словами: можно установить взаимнооднозначное соответствие между множеством наборов всех возможных остатков (r_1, r_2, …, r_n) при делении на m_1, m_2, ..., m_n и множеством всех натуральных чисел, лежащих на любом отрезке длины $m=m_1m_2\ldots m_n$.

Выглядит страшно? На самом деле здесь утверждается вот что. Если взять систему из нескольких сравнений по взаимно простым модулям (например вот такую:)

$\begin{cases} x \equiv a \pmod{33} \\ x \equiv b \pmod{10} \\ x \equiv c \pmod{49} \\ x \equiv d \pmod{13} \end{cases}$, то можно вместо a, b, c, d поставить любые целые числа и у сравнения всегда будет решение вида: $x \equiv f \pmod M$, где $M = 33 \times 10 \times 49 \times 13$

План доказательства: Пусть m_1, m_2, ..., m_n – взаимно простые натуральные числа, произведение которых равно m. Для каждого числа, лежащего на отрезке от 1 до m найдем набор остатков (r_1, r_2, …, r_n), которые оно дает при делении на m_1, m_2, ..., m_n соответственно. «Приклеим» к каждому числу бирку с его собственным набором.

Утверждение 1. Среди этих m чисел нет двух с одинаковыми бирками. Действительно, если предположить, что два таких числа a и b нашлись, то их разность делилась бы на каждое из чисел m_1, m_2, ..., m_n. Поскольку эти числа взаимнопросты, это бы означало, что $(a-b) \vdots m$. Но если два числа расположены на отрезке от 1 до m, то максимальная разность между ними равна m–1. Получили противоречие, а значит все бирки различны.

Утверждение 2. Всех возможных бирок ровно столько, сколько чисел на отрезке от 1 до m. Действительно, первый остаток на бирке можно выбрать m_1 способами, второе - m_2 способами, и так далее. Значит всевозможных бирок ровно $m=m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_n$

Из этих двух утверждений следует Китайская теорема об остатках.

05 Китайская теорема об остатках. Задачи

1. Из натуральных чисел, меньших 1000000, Оксана выписала все числа, которые при делении на 23 дают остаток 17, а при делении на 11 остаток 5. Маша из натуральных чисел, меньших 1000000, выписала все дающие остаток 11 при делении на 21, и остаток 3 при делении на 13. а) У кого чисел больше? б) Найдутся ли в списках Оксаны и Маши одинаковые числа?

2. Докажите, что существует такое натуральное n, что число $2021n$ оканчивается на 987654321? *Подсказка: попробуйте написать систему из двух сравнений для этой задачи.*

3. *(Просто полезная теорема)* Для любых попарно взаимно простых чисел m_1, m_2, …, m_n и остатков r_1, r_2, …, r_n по модулям m_1, m_2, …, m_n найдутся n последовательных чисел a, $a+1$, …, $a+n-1$ таких, что $a \equiv r_1 (\mathrm{mod}\, m_1)$, $a+1 \equiv r_2 (\mathrm{mod}\, m_2)$, …, $a+n-1 \equiv r_n (\mathrm{mod}\, m_n)$.

4. Докажите, что для любого n найдутся n подряд идущих натуральных чисел, делителями которых являются полные квадраты, причем различные для разных чисел.

5. Докажите, что найдутся 2020 последовательных натуральных чисел, каждое из которых имеет не менее трех различных простых делителей.

6. Генерал построил солдат в колонну по 4, но при этом солдат Иванов остался лишним. Тогда генерал построил солдат в колонну по 5. И снова Иванов остался лишним. Когда же и в колонне по 6 Иванов оказался лишним, генерал посулил ему наряд вне очереди, после чего в колонне по 7 Иванов нашел себе место и никого лишнего не осталось. Какое наименьшее количество солдат могло быть у генерала?

7. На карусели 56 пронумерованных сидений, расположенных по порядку. Дети пришли к пустой карусели и садятся на каждое тринадцатое кресло (то есть первый сел на 13-е, второй на 26-е и так далее, пропуская 12 кресел и садясь на следующее). Если кресло, на которое собирался сесть ребёнок, оказывается занятым, процесс заканчивается. Докажите, что в конце все места будут заняты и определите номер места, которое будет занято последним.

8. В саду прекрасного принца (больше известного как чудовище) растут четыре волшебных цветка. Первый расцветает один раз в 4 дня, второй – один раз в 5 дней, третий – один раз в 3 дня, а четвертый – один раз в 11 дней. Если прекрасная девушка поцелует чудовище в один из дней, когда цветут все четыре цветка, принц примет свой прежний облик. Сколько раз за десять лет может представиться такая возможность? Укажите все возможные варианты.

9. У Кащея бессмертного есть четыре волшебных источника. Первый бьет из земли один раз в 4 дня, второй – один раз в 5 дней, третий – один раз в 6 дней, а четвертый – один раз в 9 дней. Если в один день попить из всех четырех источников, то станешь бессмертным. Сколько раз за десять лет может представиться такая возможность? Укажите все возможные варианты.

10. Докажите, что любые 35 подряд идущих целых чисел можно расставить в прямоугольнике 7×5 так, что сумма чисел, стоящих в любых двух соседних по стороне клетках делится или на 7 или на 5?

11. Число называется *автоморфным*, если последние цифры квадрата этого числа совпадают с самим числом. Начало последовательности автоморфных чисел выглядит так : 1, 5, 6, 25, 76, 376, 625, 9376, 90625, … Докажите, что для $n>1$ существует не более двух n–значных автоморфных чисел.

12. При изготовлении елочной гирлянды электрик Петров сделал на куске провода отметки, делящие его на 113 одинаковых кусков, и ушел отдыхать. В это время электрик Иванов разметил тот же провод на 137 одинаковых кусков и пошел туда же. В это время вернувшийся из магазина электрик Сидоров быстро разрезал провод по всем отметкам. Куски какого размера у него получились, и сколько получилось кусков каждого вида?

13. Младший бог Нка выписывает в строчку числа натурального ряда в некотором порядке. Докажите, что он может действовать так, что каждое число рано или поздно появится, каждое число встретится ровно один раз и при этом сумма любых N первых чисел будет делиться на N.