

## Ориентированные графы

1. Слуги графа Влада сели обедать за круглым столом. Как только прозвучал сигнал к началу обеда, в каждой паре соседей более галантный слуга передал менее галантному вилку. Докажите, что количество слуг, передавших две вилки, равно количеству слуг, две вилки получивших.
2. Некоторые города Семиградья соединены дорогами, причем любые два — не более, чем одной.
  - (а) Витязь Миклош хочет ввести на каждой дороге одностороннее движение так, чтобы из города, в котором находится его резиденция, можно было доехать до любого другого. Покажите, как ему это сделать.
  - (б) Граф Влад хочет ввести на каждой дороге одностороннее движение так, чтобы выехав из города ты уже не смог вернуться обратно. Покажите, как ему это сделать.
3. В Трансильвании, кроме замка графа Влада, есть еще 444 замка. Некоторые замки соединены дорогами с односторонним движением, причем в каждый замок, кроме замка Влада, входит 100 дорог, и из каждого замка, кроме замка Влада, выходит 101 дорога. Докажите, что из замка Влада не выходит ни одной дороги.
4.
  - (а) Любые два города страны Эрдей соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что граф Влад сможет выбрать один из них своим логовом так, чтобы из логова до любого другого города можно было добраться не более, чем с одной пересадкой.
  - (б) Любые два города страны Эрдей соединены дорогой с односторонним движением, при этом из Брассо и Колосвара выходит по 100 дорог. Докажите, что тогда найдется в Эрдейе какой-то город  $X$ , такой, что по  $X$ , Брассо и Колосвару можно проехать как по треугольнику.
5. Граф Влад при входе выдал каждому гостю своей вечеринки браслет с номером. В 04:20 на вечеринке возникла размолвка, в итоге гость с браслетом №1 кусил гостя, который кусил гостя с браслетом №2, гость с браслетом №2 кусил гостя, который кусил гостя с браслетом №3, ..., гость с браслетом с самым большим номером кусил гостя, который кусил гостя с браслетом №1. Больше никто не кусался. Докажите, что на вечеринку к Владу пришло нечетное количество гостей.