Сочетания

Определение. Сочетанием из n по k называется набор из k элементов, выбранных из n-элементного множества, в котором не учитывается порядок элементов. Число сочетаний из n по k обозначается C_n^k.

Упражнения

1. Докажите, что $C_n^k = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.
2. Найдите:
   (а) C_{10}^3;
   (б) C_n^1;
   (в) C_n^{n-2}.
3. Докажите, что $C_n^k = C_n^{n-k}$.
4. Докажите, что $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k$.

Задачи

1. Докажите, что произведение k последовательных натуральных чисел всегда делится на $k!$.

2. Докажите, что если p — простое число, и $1 \leqslant k \leqslant p-1$, то C_n^k делится на p.

3. Сколько различных пятнадцатизначных чисел можно составить из 5 четверок, 5 шестерок и 5 семерок?

4. Докажите, что
(а) $C_m^k \cdot C_{m-k}^n = C_m^n \cdot C_{m-n}^k$
(б) $C_n^m = C_2^0 \cdot C_{n-2}^m + C_2^1 \cdot C_{n-2}^{m-1} + C_2^2 \cdot C_{n-2}^{m-2}$
(в) $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$
(г) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$
(д) $n \cdot C_{n-1}^{k-1} = k \cdot C_n^k$

5. Докажите, что $C_n^0 + 2 \cdot C_n^1 + 2^2 \cdot C_n^2 + \dots + 2^n \cdot C_n^n = 3^n$

6. Федор сыграл 10 партий в пинг-понг. Все проиграл, причем в первой партии набрал 9 очков, а в каждой следующей — столько же, сколько в предыдущей или на 1 меньше. В последней партии Федор набрал 4 очка. Сколько существует вариантов распределения очков Федора по партиям?

7. Петр сыграл ровно 100 партий в пинг-понг. Сколько существует вариантов реальности, в которых у него ровно 10 серий поражений?