

Неравенства треугольника. Часть вторая. Теоретическая.

0. Даны три отрезка, чьи длины равны a, b, c . Докажите, что если $a + b > c$ и $|a - b| < c$, то из этих отрезков можно построить треугольник. *Задачу ноль решать не надо.*
1. Даны три отрезка, чьи длины равны a, b, c . Докажите, что если $a + b > c$, $a + c > b$ и $b + c > a$, то из этих отрезков можно построить треугольник. *Это задачу надо вывести из задачи ноль.*

Теорема. Для любых трёх точек A, B, C выполнено неравенство $AC \leq AB + BC$. Причём равенство достигается только тогда, когда точка B лежит на отрезке AC .

2. Доказательство теоремы.

- (а) Докажите теорему для случая, когда точки A, B, C лежат на одной прямой.
- (б) Рассмотрим случай, когда точки A, B, C не лежат на одной прямой. Отложим на луче AB за точкой B точку D так, что $BD = BC$. Докажите, что $\angle ADC < \angle ACD$.
- (в) Докажите теорему для случая, когда точки A, B, C не лежат на одной прямой.

3. Докажите, что в треугольнике ABC верно неравенство $|AB - BC| < AC$.

4. Прямой путь короче, чем любой другой.

- (а) Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что $AD < AB + BC + CD$.
- (б) Дан выпуклый многоугольник $A_1A_2A_3 \dots A_n$. Докажите, что

$$A_1A_n < A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n.$$

- (в) Дана произвольная ломанная $A_1A_2A_3 \dots A_n$. Докажите, что

$$A_1A_n < A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n.$$

Определение. Расстояние от точки до прямой — это длина перпендикуляра, проведенного из данной точки к данной прямой.

5. Из точки A опустили перпендикуляр $АН$ на прямую ℓ . Также на этой прямой отмечена произвольная точка B , не совпадающая с точкой H .
 - (а) Докажите, что $AB > AH$.
 - (б) На плоскости отмечена C точка. Докажите, что $AC + CB > AH$.
 - (в) На плоскости отмечено несколько точек: X_1, X_2, \dots, X_n . Докажите, что

$$AH < AX_1 + X_1X_2 + \dots + X_{n-1}X_n + X_nB.$$

В листике суммарно 11 задач (включая пункты).

За 6 решенных задач выдается следующий листик, за который будет выставляться оценка. За каждую последующую решенную задачу будут ставиться плюсики по геометрии. Сдавать задачи можно устно 29 января и 4 февраля, а также письменно (своему преподавателю) в течение недели.