

Неравенства треугольника. Часть первая.

Теорема. В треугольнике против большей стороны треугольника лежит больший угол. А против большего угла треугольника лежит большая сторона.

1. (а) Доказательство первой части теоремы.

Дан треугольник ABC , в котором $\angle A > \angle B$. Отметим на луче CB такую точку X , что

$$\angle CAH = \frac{\angle A + \angle B}{2}.$$

Осознайте, что точка X попала на отрезок BC , и докажите, что $BC > AC$.

(б) Доказательство второй части теоремы.

Дан треугольник ABC , в котором $BC > AC$. Отметим на стороне CB такую точку X , что $AC = CX$. Докажите, что $\angle A > \angle B$.

2. В треугольнике ABC известно, что $AB < BC < AC$, а один из углов вдвое меньше другого и втрое меньше третьего. Найдите угол при вершине A .
3. На основании AC равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) отмечена произвольная точка X . Докажите, что $BX < BC$.
4. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом B проведена высота BH . Докажите, что если $AB > BC$, то $AH > HC$.
5. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH . Докажите, что если $HC < AH$, то $\angle C > \angle A$ (отметьте на HA такую точку X , что $HC = HX$).
6. **(а)** Докажите, что основание высоты треугольника, проведённой из вершины наибольшего угла, лежит на стороне треугольника (а не на её продолжении).
(б) Докажите, что основания высот остроугольного треугольника лежат на сторонах треугольника (а не на их продолжениях).
В обоих пунктах этой задачи надо рассуждать от противного.
7. В треугольнике ABC проведена высота BH .
(а) Докажите, что если $AH > HC$, то $AB > BC$ (стоит вспомнить про задачу 5).
(б) Докажите, что если $AB > BC$, то $AH > HC$.
Не забывайте, что треугольники бывают не только остроугольные!
8. В треугольнике ABC проведена медиана BM .
(а) Докажите, что если $\angle AMB > \angle CMB$, то $AB > BC$ (стоит провести высоту BH и воспользоваться задачей 5).
(б) Докажите, что если $AB > BC$, то $\angle AMB > \angle CMB$ (рассуждения от противного!).
9. В треугольнике ABC провели медиану BM . Известно, что $AB > BC$. Сравните углы ABM и CBM .
10. Диагональ AC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ делит пополам диагональ BD . Известно, что $AB > AD$. Какой угол больше: BCA или DCA ?