

## Ориентированные графы

1. На вампирской вечеринке каждый вампир кусил одного другого вампира. Докажите, что их можно разбить на три клана так, чтобы вампиры из одного клана не кусали друг друга (во всяком случае, на этой вечеринке).

*Отличный план - взять первых попавшихся трех вампиров и поставить их во главе кланов. А потом по очереди предлагать вампирам выбрать подходящий для них клан. Вопрос только в том, почему этот план сработает)*

2. Слуги графа Влада сели обедать за круглым столом. Как только прозвучал сигнал к началу обеда, в каждой паре соседей более галантный слуга передал менее галантному вилку. Докажите, что количество слуг, передавших две вилки, равно количеству слуг, две вилки получивших.

*Попробуйте воспользоваться следующим соображением: количество отданных вилок, равно количеству полученных вилок.*

3. 11 декабря граф Влад наведался в деревню Турда и донес до одного из ее жителей, какой он замечательный правитель. Дальше каждый день каждый житель, знающий, какой Влад замечательный, рассказывает об этом всем своим друзьям, которые этого еще не знают, на следующий день они рассказывают своим и т.д. Оказалось, что 25 декабря еще не все жители знали, какой замечательный правитель Влад, а вот 31 декабря — уже все. Докажите, что в Турде не могло жить меньше 15 человек.

*В общем-то у деревни бывают дни двух типов: те, в которые никто не узнает новость и те, в которые кто-то все-таки узнает. Подумайте, могут они чередоваться?*

4. Некоторые города Семиградья соединены дорогами, причем любые два — не более, чем одной.

**(а)** Витязь Миклош хочет ввести на каждой дороге одностороннее движение так, чтобы из города, в котором находится его резиденция, можно было доехать до любого другого. Покажите, как ему это сделать.

*Предлагаем действовать таким же решительным образом, как и в первой задаче. Сначала сделаем так, чтобы из резиденции Миклоша все дороги были ВЫХОДЯЩИМИ (ну, правильно, зачем нам ВХОДЯЩИЕ туда дороги)? Теперь посмотрим на города, в которые уже направлена ВХОДЯЩАЯ дорога. Выгодно нам, чтобы другие дороги ВХОДИЛИ в этот город или ВЫХОДИЛИ из него?*

**(б)** Граф Влад хочет ввести на каждой дороге одностороннее движение так, чтобы выехав из города ты уже не смог вернуться обратно. Покажите, как ему это сделать.

*Давайте начнем с того, что сделаем первый город таким, что из него ВЫХОДЯТ все дороги, ни одной не ВХОДИТ. Понятно, что выехав из него мы уже не вернемся*

назад. Теперь посмотрим на города, в которые уже направлена ВХОДЯЩАЯ дорога. Выгодно нам, чтобы другие дороги ВХОДИЛИ в этот город или ВЫХОДИЛИ из него?

5. В Трансильвании, кроме замка графа Влада, есть еще 444 замка. Некоторые замки соединены дорогами с односторонним движением, причем в каждый замок, кроме замка Влада, входит 100 дорог, и из каждого замка, кроме замка Влада, выходит 101 дорога. Докажите, что из замка Влада не выходит ни одной дороги.

*Обратите внимание на упражнение 3)*