Остатки и сравнения.

Теория.

Сравнения по модулю. *Говорят, что два числа a и b сравнимы по модулю d, если их разность делится на d.*

$$a \equiv b \pmod d \qquad \Longleftrightarrow \qquad a - b \,\vdots\, d.$$

Эквивалентное определение. *Два числа сравнимы по модулю d тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые остатки при делении на d.*

Важное замечание. *Каждое число сравнимо по модулю d со своим остатком от деления на d.*

Основное свойство. *Если в выражении, использующем только знаки сложения, умножения и вычитания, заменить одно из входящих чисел на сравнимое с ним по модлую d, то значение полученного выражения будет сравнимо со значением исходного выражения по модулю d.*

$$a \equiv b \pmod d \qquad \Longrightarrow \qquad P(a) \equiv P(b) \pmod d.$$

Задачи.

1. Докажите, что $n^3 + 2n$ делится на 3 при любом натуральном n.

2. Докажите, что $n^5 + 4n$ делится на 5 при любом натуральном n.

3. Докажите, что $n^2 + 1$ не делится на 3 ни при каком натуральном n.

4. Докажите, что $n^3 + 2$ не делится на 9 ни при каком натуральном n.

5. Докажите, что $n^3 - n$ делится на 24 при любом нечетном n.

6. Натуральные числа x, y и z таковы, что $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел делится на три.

7. Сумма квадратов двух натуральных чисел делится на 21. Докажите, что эта сумма делится на 441.

8.Сумма трех натуральных чисел делится на 6. Докажите, что сумма их кубов тоже делится на 6.

9. Докажите, что сумма квадратов трех натуральных чисел не может иметь остаток 7 при делении на 8.

10. Сумма квадратов трех натуральных чисел делится на 9. Докажите, что из этих чисел можно выбрать два, разность квадратов которых делится на 9.