

Графы. Подсчёт рёбер.

Разминка

а) Сытый марсианский кот Васька поймал 6 марсианских мышек (у марсианских мышек – 3 хвоста) и стал связывать их хвостами: берёт два свободных хвоста, и связывает их узлом. Через некоторое время свободных хвостов не осталось. Сколько узелков ему пришлось завязать? б) На следующий день Васька поймал еще одну мышку и решил, развязав некоторые из узелков, связать эту мышку со всеми остальными. Сможет ли он это сделать так, чтобы по-прежнему не было свободных хвостов?

Определение. Степенью вершины в графе называется количество выходящих из этой вершины рёбер. Посчитать количество рёбер в графе можно так: посчитать сколько концов рёбер торчит в сумме из всех вершин и потом поделить полученную сумму на два (потому что каждое ребро было посчитано два раза).

Лемма о рукопожатиях В любом графе сумма степеней вершин – чётное число. То есть, количество вершин, имеющих нечетную степень, — чётно. (Другая формулировка: «За всё время существования Земли жило четное количество людей, сделавших нечетное количество рукопожатий».) Эта лемма справедлива также и для каждой компоненты связности графа в отдельности.

Задачи для самостоятельного решения

1. Федора натянула во дворе веревки для белья. Причем к 6 столбам она прикрепила по 7 веревок, к 4 столбам — по 6 веревок, и к 8 — по 2 веревки. Сколько всего веревок она натянула?
2. Артём нарисовал на окружности 9 точек и каждые две точки соединил отрезком. Сколько отрезков нарисовал Артём?
3. Электрик решил соединить проводами каждый из пятнадцати корпусов ровно с девятью другими. Сможет ли он это сделать?
4. Архипелаг, расположенный вблизи континента, состоит из 7 островов. С каждого из островов ведет 1, 3 или 5 мостов. Может ли быть так, что ни один остров не соединён мостом с континентом?
5. У Пети 5 друзей среди одноклассников. У остальных его одноклассников 4, 6 или 8 друзей. И только у новичка Саши всего один друг. Докажите, что Петя может отправить Саше записку, если каждый будет передавать записку одному из своих друзей.
6. Шпионская сеть устроена следующим образом. Каждый из шпионов знает ровно четырех других. Получив какую-либо информацию, шпион передает ее всем другим,

известным ему, шпионам. При этом рано или поздно будет оповещён каждый. Однажды, при передаче сообщения шпион Джон не смог связаться со шпионом Майклом. Докажите, что, несмотря на это вся сеть будет оповещена.