

Доказательство от противного

Доказывая некоторое утверждение от противного мы сначала *предполагаем*, что наше утверждение неверно. После этого выводим в результате рассуждений из этого предположения какое-нибудь *противоречие* условиям задачи. Из этого следует, что исходное утверждение верно. Обратите внимание, что очень важно верно сформулировать противоположное утверждение. Сформулируйте противоположное к утверждению: «Во всех карманах моей жилетки есть конфеты».

0. В магазине продают карандаши 5 цветов.

а) Яна купила 16 карандашей. Докажите, что среди них есть четыре одного цвета.
Решение: Предположим, что нет четырёх одинаковых карандашей. Тогда карандашей каждого цвета не больше трёх. Тогда всего карандашей не больше, чем $5 \times 3 = 15$. Но у Яны 16 карандашей. Получаем противоречие. Значит карандашей какого-то цвета не меньше четырёх.

б) Юля купила 9 карандашей. Докажите, что есть хотя бы два таких цвета, что карандашей этих двух цветов у Юли поровну.

Решение: Предположим, что таких двух цветов не найдётся. Тогда возьмём самый «малочисленный» цвет. Карандашей этого цвета будет хотя бы ноль (меньше просто не бывает). Карандашей второго по численности цвета будет хотя бы 1, третьего – хотя бы 2, четвёртого – хотя бы 3, пятого хотя бы 4. Тогда всего карандашей должно быть хотя бы $0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Но у Юли только 9 карандашей. Получили противоречие. Утверждение доказано.

1. Докажите, что среди 25 учеников класса найдутся трое, отмечающие день рождения в один и тот же месяц.
2. 35 шариков разложили в 8 коробок так, что пустых коробок не осталось. Докажите, что есть две коробки, в которых шариков поровну.
3. Семь золотоискателей нашли 32 слитка золота. Могло ли случиться так, что при этом все они нашли разное количество слитков, если известно, что каждый обнаружил хотя бы два?
4. В классе 13 мальчиков и 17 девочек. Известно, что каждый мальчик дружит хотя бы с 4 девочками. Докажите, что найдётся девочка, которая дружит не менее, чем с 4 мальчиками.
5. Десять друзей отправили друг другу открытки, при этом каждый отправил открытки ровно пяти своим друзьям. Докажите, что найдутся двое, отправившие открытки друг другу.
6. В классе 26 учеников. Верно ли, что:
 - а) обязательно найдутся четверо, отмечающих день рождения в один месяц?
 - б) обязательно найдутся по крайней мере два месяца, когда день рождения отмечают ровно три ученика класса?
 - в) можно наверняка утверждать, что из пунктов а) и б) верен хотя бы один?
7. На плоскости проведено 10 непересекающихся отрезков так, что никакие два отрезка не лежат на одной прямой. Докажите, что найдётся такой отрезок, продолжение которого (в обе стороны) пересекает менее 5 других отрезков.