

17 Графы. Подсчёт рёбер.

--- Федора натянула веревки для белья. Причем к 6 гвоздикам она прикрепила по 7 веревок, к 4 гвоздикам — по 6 веревок, и к 8 — по 2 веревки. Сколько всего веревок она натянула?

Определение. Степенью вершины в графе называется количество выходящих из этой вершины рёбер.

--- а) Сытый марсианский кот Васька поймал 6 марсианских мышек (у марсианских мышек – 3 хвоста) и связал их хвостами так, что свободных хвостов не осталось. Сколько узелков ему пришлось завязать?

б) Васька поймал еще одну мышку и решил, развязав некоторые из узелков, связать эту мышку со всеми остальными. Сможет ли он это сделать так, чтобы по-прежнему не было свободных хвостов?

--- (**Лемма о рукопожатиях**) В любом графе сумма степеней вершин – чётное число. То есть, количество вершин, имеющих нечетную степень, — чётно. (Другая формулировка: «За всё время существования Земли жило четное количество людей, сделавших нечетное количество рукопожатий».) Эта лемма справедлива также и для каждой компоненты связности графа в отдельности.

1. Электрик решил соединить проводами каждый из пятнадцати корпусов ровно с девятью другими. Сможет ли он это сделать?
2. Архипелаг, расположенный вблизи континента, состоит из 7 островов. С каждого из островов ведет 1, 3 или 5 мостов. Может ли быть так, что ни один остров не соединён мостом с континентом?
3. У Пети 5 друзей среди одноклассников. У остальных его одноклассников 4, 6 или 8 друзей. И только у новичка Саши всего один друг. Докажите, что Петя может отправить Саше записку, если каждый будет передавать записку одному из своих друзей.
4. Вражеская шпионская сеть устроена следующим образом. Каждый из шпионов знает ровно четырех других. Получив какую-либо информацию, шпион передает ее всем другим, известным ему, шпионам. При передаче секретного сообщения шпион Джон не смог связаться со шпионом Майклом. Докажите, что, несмотря на это вся сеть будет оповещена.
5. Несколько деревень связаны между собой дорогами, причем из каждой можно проехать в любую другую. Из деревни Четверкино выходит 4 дороги, из Пятеркино — 5, из Шестеркино — 6, из Семеркино — 7, из Восьмеркино — 8, а из всех остальных выходит четное число дорог. После того, как была закрыта одна из дорог, появились две такие деревни, что от одной невозможно добраться до другой. Докажите, что и от Пятеркино до Семеркино теперь тоже не доберешься.
6. Дед Мороз пообещал Олегу: «Все твои желания исполнятся, если придумаешь пять таких русских слов, чтобы каждое имело хотя бы одну общую букву ровно с тремя другими». Помогите Олегу.
7. Можно ли подобрать компанию, где у каждого ее члена было бы пять друзей, а у любых двух – ровно два общих друга?