

Неравенства-2

Неравенство Юнга: Пусть $a > 0, b > 0, p > 1, q > 1, p$ и q рациональны и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Транснеравенство:

Пусть $x_1 \geq \dots \geq x_n, y_1 \geq \dots \geq y_n, i_1, \dots, i_n = 1, \dots, n$. Тогда

$$x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \geq x_1 y_{i_1} + \dots + x_n y_{i_n} \geq x_1 y_n + \dots + x_n y_1.$$

Неравенство Чебышева:

Пусть $x_1 \geq \dots \geq x_n, y_1 \geq \dots \geq y_n$. Тогда

$$\frac{x_1 y_1 + \dots + x_n y_n}{n} \geq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \frac{y_1 + \dots + y_n}{n} \geq \frac{x_1 y_n + \dots + x_n y_1}{n}.$$

1. Доказать, что $2^{n-1}(a^n + b^n) > (a + b)^n$.

2. Докажите, что для $x, y, z > 0$ верно неравенство

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

3. Докажите неравенство Юнга

4. Какое из чисел больше: $100500 \cdot 444 + 2021 \cdot 2022 + 1234 \cdot 9000$ или $100500 \cdot 2022 + 9000 \cdot 2021 + 1234 \cdot 444$? Посчитанный на калькуляторе или (ну вдруг найдётся смелый) вручную ответ не засчитается!

5. a, b, c — положительные числа. Докажите неравенство:

$$a \cdot 2^a + b \cdot 2^b + c \cdot 2^c \geq a \cdot 2^b + b \cdot 2^c + c \cdot 2^a.$$

6. x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — положительные числа. Докажите неравенство:

$$\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \frac{x_3^2}{x_4} + \frac{x_4^2}{x_5} + \frac{x_5^2}{x_1} \geq x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5.$$

7. a, b, c — положительные числа. Докажите неравенство

$$a + b + c \geq \frac{a(b+1)}{a+1} + \frac{b(c+1)}{b+1} + \frac{c(a+1)}{c+1}.$$

8. Пусть a, b, c — стороны треугольника, а α, β, γ — соответствующие углы того же треугольника. Докажите неравенство:

$$aa + \beta b + \gamma c \geq \frac{1}{2}(ab + \beta c + \gamma b + \alpha c + \beta a + \gamma a).$$

9. Докажите неравенство Чебышева.