Векторы

1. **(а)** В треугольнике ABC медианы пересекаются в точке M. Докажите, что

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

(б) Дан треугольник ABC. На плоскости нашлась такая точка P, что

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}.$$

Докажите P — точка пересечения медиан ABC.

(в) Стороны треугольника T параллельны медианам треугольника T_1. Докажите, что медианы треугольника T параллельны сторонам треугольника T_1.

2. На плоскости отмечены четыре точки: A, B, C, D. Пусть M — середина BC, N — середина AD. Докажите, что $MN \leqslant (BA + CD)/2$.

3. В треугольнике ABC на стороне AB выбраны точки K и L так, что $AK = BL$, а на стороне BC — точки M и N так, что $CN = BM$. Докажите, что $KN + LM \geqslant AC$.

4. На плоскости даны 2022 вектора с
(а) нулевой;
(б) ненулевой суммой.
Два игрока по очереди берут себе по вектору. Выигрывает тот, у кого больше получится модуль суммы векторов. Кто выиграет при правильной игре обоих соперников?

5. В треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно. Найдите длину стороны AC, если известно, что сумма векторов $3 \cdot \overrightarrow{AA_1} + 4 \cdot \overrightarrow{BB_1} + 5 \cdot \overrightarrow{CC_1}$ равна вектору с координатами $(2, 1)$.
(*Подсказка: вспомните первую задачу.*)

6. Дан четырёхугольник $ABCD$. A', B', C' и D' — середины сторон BC, CD, DA и AB соответственно. Известно, что $AA' = CC'$ и $BB' = DD'$. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

7. Середины противолежащих сторон шестиугольника соединены отрезками. Оказалось, что точки пересечения этих отрезков образуют равносторонний треугольник. Докажите, что эти отрезки равны.