Неравенства о средних

Пусть числа $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n > 0$. Тогда для этого набора чисел выполняются *неравенства о средних* (или *неравенства Коши*):

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} \leqslant \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}}.$$

1. Произведение n положительных чисел равно 1. Докажите, что сумма этих чисел не меньше, чем n.

2. Герман и Данила каждый день покупали себе блёстки (блёстки продаются на развес). Цена на блёстки ежедневно менялась. Средняя цена на блёстки за месяц оказалась равной 200 рублям за 100 грамм. Ежедневно Данила покупал по 100 грамм блёсток. Через месяц они встречаются, и Герман, узнав это, говорит: «Данила, ты что крейзи?! Я покупаю каждый день блёсток на 200 рублей и точно знаю, сколько денег у меня остаётся на помаду». Кто из них потратил за месяц больше денег и кто купил больше блёсток?

3. У каждого человека-муравья есть свои муравьи, не у всех поровну. Два муравья являются товарищами, если у них общий хозяин (в частности, каждый муравей сам себе товарищ). Что больше: среднее количество муравьёв, которыми владеет человек муравей, или среднее количество товарищей у муравья?

4. Пусть $x_1, \dots, x_n > 0$ и $x_1 + \dots + x_n = 1$. Найдите наибольшее и наименьшее значения следующих величин (если они существуют):

(а) $x_1 \cdot \dots \cdot x_n$,

(б) $x_1^2 + \dots + x_n^2$,

(в) $\dfrac{1}{x_1} + \dots + \dfrac{1}{x_n}$,

(г) $x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n$,

(д) $x_1^3 + \dots + x_n^3$.

5. Для неотрицательных чисел a и b докажите неравенства:

(а) $a + 17b \geqslant 18\sqrt[18]{ab^{17}}$,

(б) $\dfrac{a^6 + b^9}{4} \geqslant 3a^2b^3 - 16$,

(в) $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geqslant 5\sqrt[5]{ab}$.

6. Докажите, что $x^4 - x + 0.5 > 0$.

7. Пусть $x > -1$. Докажите, что для любого натурального n выполняется *неравенство Бернулли*:

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx.$$