Геометрия

1. Дан параллелограмм $ABCD$ и выбраны точки A_1, B_1, C_1, D_1 такие, что точка A является серединой отрезка DD_1, точка B — серединой AA_1, точка C — серединой BB_1 и точка D — серединой CC_1. Найдите площадь $A_1B_1C_1D_1$, если известно, что площадь $ABCD$ равна 1.

2. Окружности с центрами в точках O_1 и O_2 пересекаются внешним образом в точках A и B (т. е. точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой AB). Известно, что $\angle AO_1B = \alpha$, $\angle AO_2B = \beta$, $O_1O_2 = a$. Найдите радиусы окружностей.

3. Через точку, лежащую на оси цилиндра радиуса $\sqrt{3}$ и отстоящую от ближайшего к ней основания цилиндра на расстояние 1, проведена плоскость. Найдите объём меньшей части цилиндра если уго между этой плоскостью и осью цилиндра равен $60°$.

4. В треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно.
   (а) Докажите, что сумма $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}$ равна нулевому вектору.
   (б) Найдите длину стороны AC, если известно, что сумма векторов $3 \cdot \overrightarrow{AA_1} + 4 \cdot \overrightarrow{BB_1} + 5 \cdot \overrightarrow{CC_1}$ равна вектору с координатами $(2, 1)$.

5. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Касательные к этой окружности, проведённые в точках A и C, пересекаются на прямой BD. Найдите сторону AD, если $AB = 2$ и $BC : CD = 4 : 5$.

6. Плоскость проходит через точку K, лежащую на ребре SA пирамиды $SABC$, делит биссектрису SD грани SAB и медиану SE грани SAC пополам. В каком отношении эта плоскость делит объём пирамиды, если $SK : KA = SA : SB = 2$?

[Школа №444] А. А. Балакин, А. А. Кильянов

[*2021-2022 г.*] группа: 10-11 класс *2 октября 2021 г.*

Геометрия

1. Дан параллелограмм $ABCD$ и выбраны точки A_1, B_1, C_1, D_1 такие, что точка A является серединой отрезка DD_1, точка B — серединой AA_1, точка C — серединой BB_1 и точка D — серединой CC_1. Найдите площадь $A_1B_1C_1D_1$, если известно, что площадь $ABCD$ равна 1.

2. Окружности с центрами в точках O_1 и O_2 пересекаются внешним образом в точках A и B (т. е. точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой AB). Известно, что $\angle AO_1B = \alpha$, $\angle AO_2B = \beta$, $O_1O_2 = a$. Найдите радиусы окружностей.

3. Через точку, лежащую на оси цилиндра радиуса $\sqrt{3}$ и отстоящую от ближайшего к ней основания цилиндра на расстояние 1, проведена плоскость. Найдите объём меньшей части цилиндра если уго между этой плоскостью и осью цилиндра равен $60°$.

4. В треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно.
   (а) Докажите, что сумма $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}$ равна нулевому вектору.
   (б) Найдите длину стороны AC, если известно, что сумма векторов $3 \cdot \overrightarrow{AA_1} + 4 \cdot \overrightarrow{BB_1} + 5 \cdot \overrightarrow{CC_1}$ равна вектору с координатами $(2, 1)$.

5. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Касательные к этой окружности, проведённые в точках A и C, пересекаются на прямой BD. Найдите сторону AD, если $AB = 2$ и $BC : CD = 4 : 5$.

6. Плоскость проходит через точку K, лежащую на ребре SA пирамиды $SABC$, делит биссектрису SD грани SAB и медиану SE грани SAC пополам. В каком отношении эта плоскость делит объём пирамиды, если $SK : KA = SA : SB = 2$?