

Квадратный трёхчлен

1. Докажите, что квадратное уравнение $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$ имеет хотя бы один корень.

Задачи для самостоятельного решения:

1. Известно, что разность кубов корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равна 2021. Сколько корней имеет уравнение $ax^2 + 2bx + 4c = 0$?
2. Рассмотрим квадратичные функции $y = x^2 + px + q$, для которых $p + q = 444$. Докажите, что все параболы, являющиеся графиками этих функций, пересекаются в одной точке.
3. Докажите, что если $c(a + b + c) < 0$, то $\frac{b^2}{4} > ac$.
4. Пусть $b > a + c > 0$. Сколько корней имеет квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$? Изменится ли ответ, если убрать требование « > 0 »?
5. Два приведённых квадратных трёхчлена имеют общий корень, а дискриминант их суммы равен сумме их дискриминантов. Докажите, что тогда дискриминант хотя бы одного из этих двух трёхчленов равен нулю.
6. Перед Геральтом лежит стопка из 15 красных, 15 синих и 15 желтых карт Гвинт. Ведьмаку требуется выбрать 15 из всех 45 карточек так, чтобы заработать максимальное количество очков. Очки при этом начисляются следующим образом. За каждую красную карту Геральт получает одно очко. За каждую синюю карту Белый Волк получает количество очков, равное удвоенному количеству выбранных красных карт, а за каждую желтую карту Ведьмак получает количество очков, равное утроенному количеству выбранных синих карточек. Какое максимальное количество очков может получить Геральт?
7. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x) = x^2 - ax - 3$, $f_2(x) = x^2 + 2x - b$, $f_3(x) = 3x^2 + (2 - 2a)x - 6 - b$ и $f_4(x) = 3x^2 + (4 - a)x - 3 - 2b$. Пусть разности их корней равны соответственно A, B, C и D . Известно, что $|C| \neq |D|$. Найдите отношение $\frac{A^2 - B^2}{C^2 - D^2}$. Значения A, B, C, D, a, b не заданы.
8. Когда к квадратному трёхчлену прибавили x^2 , его наименьшее значение увеличилось на 1, а когда из него вычли x^2 , его наименьшее значение уменьшилось на 3. А как изменится наименьшее значение, если к нему прибавить $2x^2$?
9. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — параллельные прямые, не параллельные осям координат. Известно, что график функции $y = (f(x))^2$ касается графика функции $y = -50g(x)$. Найдите все значения A такие, что график функции $y = (g(x))^2$ касается графика функции $y = \frac{f(x)}{A}$.