

Китайская теорема об остатках.

Китайская теорема об остатках. Если числа m_1, m_2, \dots, m_n попарно взаимнопросты, то для произвольных целых a_1, a_2, \dots, a_n существует такое x , что

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \dots \\ x \equiv a_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

- Докажите, что среди $M = m_1 m_2 \dots m_n$ последовательных целых чисел есть ровно одно удовлетворяющее условию китайской теоремы об остатках.
- Генерал построил солдат в колонну по 4, но при этом солдат Иванов остался лишним. Тогда генерал построил солдат в колонну по 5. И снова Иванов остался лишним. Когда же и в колонне по 6 Иванов оказался лишним, генерал посулил ему наряд вне очереди, после чего в колонне по 7 Иванов нашел себе место и никого лишнего не осталось. Сколько солдат могло быть у генерала?
- Решите системы сравнений
 -

$$\begin{array}{cccc} \begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \end{cases} & b) \begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 5 \pmod{7} \\ x \equiv 7 \pmod{11} \\ x \equiv 1 \pmod{13} \end{cases} & c) \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2} \\ x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 7 \pmod{10} \end{cases} & d) \begin{cases} x \equiv 0 \pmod{2} \\ x \equiv 1 \pmod{3} \\ x \equiv 4 \pmod{6} \\ x \equiv 6 \pmod{10} \end{cases} \end{array}$$

- Найдите минимальное натуральное число, такое что его половина является квадратом, треть — кубом, седьмая часть — седьмой степенью.
- Генерал хочет построить для парада своих солдат в одинаковые квадратные каре, но он не знает сколько солдат (от 1 до 37) находится в лазарете. Докажите, что у генерала может быть такое количество солдат, что он, независимо от заполнения лазарета, сумеет выполнить свое намерение.
- Число называется свободным от кубов, если оно не делится на куб натурального числа, большего 1. Докажите, что для любого n найдется n последовательных чисел, не свободных от кубов.
- Докажите, что существует миллион последовательных чисел, ни одно из которых не является точной степенью.
- Назовём число неадекватным, если количество различных его простых делителей превосходит наименьший из них. Есть ли 2018 неадекватных чисел подряд?
- а) В арифметической прогрессии есть член, делящийся на 1000 и есть член, делящийся на 1001. Докажите, что в прогрессии есть член, делящийся на 1001000.
б) Дана бесконечная арифметическая прогрессия из натуральных чисел. Докажите, что в ней есть число у которого есть 1000 различных простых делителей.
в) Дана бесконечная арифметическая прогрессия из натуральных чисел. Докажите, что в этой прогрессии можно выделить миллион соседних членов, у каждого из которых хотя бы 1000 различных простых делителей.

Китайская теорема об остатках.

Китайская теорема об остатках. Если числа m_1, m_2, \dots, m_n попарно взаимнопросты, то для произвольных целых a_1, a_2, \dots, a_n существует такое x , что

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \dots \\ x \equiv a_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

- Докажите, что среди $M = m_1 m_2 \dots m_n$ последовательных целых чисел есть ровно одно удовлетворяющее условию китайской теоремы об остатках.
- Генерал построил солдат в колонну по 4, но при этом солдат Иванов остался лишним. Тогда генерал построил солдат в колонну по 5. И снова Иванов остался лишним. Когда же и в колонне по 6 Иванов оказался лишним, генерал посулил ему наряд вне очереди, после чего в колонне по 7 Иванов нашел себе место и никого лишнего не осталось. Сколько солдат могло быть у генерала?
- Решите системы сравнений
 -

$$\begin{array}{cccc} \begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \end{cases} & b) \begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 5 \pmod{7} \\ x \equiv 7 \pmod{11} \\ x \equiv 1 \pmod{13} \end{cases} & c) \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2} \\ x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 7 \pmod{10} \end{cases} & d) \begin{cases} x \equiv 0 \pmod{2} \\ x \equiv 1 \pmod{3} \\ x \equiv 4 \pmod{6} \\ x \equiv 6 \pmod{10} \end{cases} \end{array}$$

- Найдите минимальное натуральное число, такое что его половина является квадратом, треть — кубом, седьмая часть — седьмой степенью.
- Генерал хочет построить для парада своих солдат в одинаковые квадратные каре, но он не знает сколько солдат (от 1 до 37) находится в лазарете. Докажите, что у генерала может быть такое количество солдат, что он, независимо от заполнения лазарета, сумеет выполнить свое намерение.
- Число называется свободным от кубов, если оно не делится на куб натурального числа, большего 1. Докажите, что для любого n найдется n последовательных чисел, не свободных от кубов.
- Докажите, что существует миллион последовательных чисел, ни одно из которых не является точной степенью.
- Назовём число неадекватным, если количество различных его простых делителей превосходит наименьший из них. Есть ли 2018 неадекватных чисел подряд?
- а) В арифметической прогрессии есть член, делящийся на 1000 и есть член, делящийся на 1001. Докажите, что в прогрессии есть член, делящийся на 1001000.
б) Дана бесконечная арифметическая прогрессия из натуральных чисел. Докажите, что в ней есть число у которого есть 1000 различных простых делителей.
в) Дана бесконечная арифметическая прогрессия из натуральных чисел. Докажите, что в этой прогрессии можно выделить миллион соседних членов, у каждого из которых хотя бы 1000 различных простых делителей.