

### Средняя линия треугольника.

1. Точки  $A_1, B_1, C_1$  – середины сторон соответственно  $BC, AC, AB$  треугольника  $ABC$ . Известно, что  $A_1A$  и  $B_1B$  – биссектрисы углов треугольника  $A_1B_1C_1$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ .
2. В трапеции  $ABCD$  основание  $BC$  в два раза меньше основания  $AD$ . Из вершины  $D$  опущен перпендикуляр  $DE$  на сторону  $AB$ . Докажите, что  $CE=CD$ .
3. Диагонали четырехугольника равны, а одна из его средних линий в два раза их меньше. Найдите угол между диагоналями.
4. На стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  взята точка  $D$  так, что  $AD:DC=1:2$ . Докажите что у треугольников  $ADB$  и  $CDB$  есть по равной медиане.
5. Пусть  $K, L, M$  и  $N$ —середины сторон  $AB, BC, CD$  и  $DA$  выпуклого четырёхугольника  $ABCD$ . а) Докажите, что  $KM \leq \frac{AC+BD}{2}$   
б) Докажите, что  $KM \leq \frac{(BC+AD)}{2}$  причём равенство достигается, только если  $BC \parallel AD$ .
6. а) В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$  стороны  $AB$  и  $CD$  равны. Пусть  $l$  — прямая, проходящая через середины  $BC$  и  $AD$ . Докажите, что  $l$  пересекает прямые  $AB$  и  $CD$  под равными углами.  
б) В выпуклом четырёхугольнике, не являющемся параллелограммом, две противоположные стороны равны. Докажите, что прямая, проходящая через середины его диагоналей, образует равные углы с этими сторонами.
7. Прямая, проходящая через середины диагоналей четырехугольника образует с его сторонами углы  $80^\circ$  и  $50^\circ$ . Докажите, что расстояние между серединами диагоналей равно половине одной из сторон четырехугольника.
8. Средняя линия четырехугольника образует равные углы с его диагоналями. Докажите, что эти диагонали равны.
9. О трапеции  $ABCD$  известно, что  $AB=BC=CD < AD$ ,  $CH$ - ее высота. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из  $H$  на  $AC$ , проходит через середину  $BD$ .  
**Домашнее задание.**
10. Две противоположные стороны шестиугольника равны и параллельны. Докажите, что середины четырех оставшихся сторон образуют параллелограмм.

### Средняя линия треугольника.

1. Точки  $A_1, B_1, C_1$  – середины сторон соответственно  $BC, AC, AB$  треугольника  $ABC$ . Известно, что  $A_1A$  и  $B_1B$  – биссектрисы углов треугольника  $A_1B_1C_1$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ .
2. В трапеции  $ABCD$  основание  $BC$  в два раза меньше основания  $AD$ . Из вершины  $D$  опущен перпендикуляр  $DE$  на сторону  $AB$ . Докажите, что  $CE=CD$ .
3. Диагонали четырехугольника равны, а одна из его средних линий в два раза их меньше. Найдите угол между диагоналями.
4. На стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  взята точка  $D$  так, что  $AD:DC=1:2$ . Докажите что у треугольников  $ADB$  и  $CDB$  есть по равной медиане.
5. Пусть  $K, L, M$  и  $N$ —середины сторон  $AB, BC, CD$  и  $DA$  выпуклого четырёхугольника  $ABCD$ . а) Докажите, что  $KM \leq \frac{AC+BD}{2}$   
б) Докажите, что  $KM \leq \frac{(BC+AD)}{2}$  причём равенство достигается, только если  $BC \parallel AD$ .
6. а) В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$  стороны  $AB$  и  $CD$  равны. Пусть  $l$  — прямая, проходящая через середины  $BC$  и  $AD$ . Докажите, что  $l$  пересекает прямые  $AB$  и  $CD$  под равными углами.  
б) В выпуклом четырёхугольнике, не являющемся параллелограммом, две противоположные стороны равны. Докажите, что прямая, проходящая через середины его диагоналей, образует равные углы с этими сторонами.
7. Прямая, проходящая через середины диагоналей четырехугольника образует с его сторонами углы  $80^\circ$  и  $50^\circ$ . Докажите, что расстояние между серединами диагоналей равно половине одной из сторон четырехугольника.
8. Средняя линия четырехугольника образует равные углы с его диагоналями. Докажите, что эти диагонали равны.
9. О трапеции  $ABCD$  известно, что  $AB=BC=CD < AD$ ,  $CH$ - ее высота. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из  $H$  на  $AC$ , проходит через середину  $BD$ .  
**Домашнее задание.**
10. Две противоположные стороны шестиугольника равны и параллельны. Докажите, что середины четырех оставшихся сторон образуют параллелограмм.