

## Зацикливания

**Принцип зацикливания.** Если система может находиться лишь в конечном числе состояний, и каждое следующее состояние однозначно определяется по предыдущему, то система с некоторого момента зациклится.

**Принцип зацикливания назад.** Если в условиях принципа зацикливания каждое предыдущее состояние определяется по следующему то система зацикливается без предпериода.

1. В поликлинике 100 кабинетов, а работает только один врач. На каждой из дверей поликлиники висит табличка «Врач в кабинете № ...». Врач и правда сидит в одном из кабинетов. Посетитель поликлиники начинает искать врача с первого кабинета, руководствуясь табличками.
  - а) Обязательно ли посетитель найдет врача?
  - б) Вернется ли он к первому кабинету?
  - в) Найдет ли он врача, если все таблички будут различны?
  - г) Вернется ли он к первому кабинету если все таблички различны?
  - д) Найдет ли он врача, если все таблички различны, и в кабинете врача висит табличка: «Врач в кабинете № 1»
2. Метеорологическая служба Тридесятого Государства следит за погодой уже 100 лет. Они подразделяют погоду на дождливую или солнечную. Метеорологи утверждают, что погода на следующий день однозначно определяется погодой в предыдущие 7 дней. Последняя неделя в Тридесятом Государстве была полностью дождливая. Докажите, что такое уже было и еще будет.
3. Следующий член последовательности натуральных чисел равен последней цифре произведения двух предыдущих. Докажите что последовательность
  - а) периодична;
  - б) с периодом длины не больше 26;
  - в) меньше 17.
4. Некоторая комбинация поворотов граней вывела кубик Рубика из собранного положения. Докажите, что кубик можно снова собрать, повторив эту же комбинацию еще несколько раз.
5. Напишем последовательность 2, 0, 1, 7, 0, 8, 6, 1, . . . и т.д., в ней каждый новый член равен последней цифре суммы четырех предыдущих. Докажите, что рано или поздно в последовательности хотя бы 5 раз встретится кусок а) 2, 0, 1, 7; б) 4, 9, 5, 4.
6. Докажите, что при переводе обыкновенной дроби  $k/p$  в десятичную получается периодическая десятичная дробь с периодом не больше  $p-1$ .

7. Докажите, что для любого натурального  $n > 1$ , в ряде Фибоначчи существует бесконечно много членов
  - а) имеющих остаток 1 при делении на  $n$ ;
  - б) делящихся на  $n$ .
8. Натуральное число заменяют суммой квадратов его цифр. Докажите, что для любого натурального числа после некоторого количества таких операций процесс зациклится.
9. На бесконечной в обе стороны ленте записан текст на русском языке. Известно, что в этом тексте число различных кусков из 15 символов равно числу различных кусков из 16 символов. Докажите, что на ленте записан «периодический» текст, например: ...мамамыларамумамамылараму...
10. По кругу сидят 2014 хамелеонов, каждый либо красного, либо зеленого цвета. Каждую секунду каждый хамелеон перекрашивается в том и только в том случае, когда его соседи разных цветов. Докажите, что когда-то первоначальная ситуация повторится.
11. По кругу стоит несколько коробочек. Каждая из них может быть пустой или содержать один или несколько шариков. Сначала из какой-то коробочки берутся все шарики и раскладываются по одному по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки. На следующем ходу раскладывают шарики из той коробочки, в которую попал последний шарик на предыдущем ходу, и т.д. Докажите, что в какой-то момент повторится начальное расположение шариков.

### Домашняя работа

12. О последовательности  $\{a_n\}$  известно, что  $a_1=7$ , и  $a_{n+1}=a_n^3+3$  при всех  $n$  больших единицы. Найдётся ли в ней число кратное 8?