

Разнойой по ТЧ

1. Дан выпуклый четырехугольник периметра 10^{100} , у которого длины всех сторон - натуральные числа, а сумма длин любых трёх сторон делится на длину оставшейся четвертой стороны. Докажите, что этот четырехугольник - ромб.
2. На доску выписали все собственные делители некоторого составного натурального числа n , увеличенные на 1. Найдите все такие числа n , для которых числа на доске окажутся всеми собственными делителями некоторого натурального числа m . (Собственными делителями натурального числа $a > 1$ называются все его натуральные делители, отличные от a и от 1.)
3. По кругу расставлены 100 натуральных чисел. Каждое из них разделили с остатком на следующее по часовой стрелке. Могло ли получиться 100 одинаковых ненулевых остатков?
4. Изначально на доске записаны несколько (больше одного) натуральных чисел. Затем каждую минуту на доску дописывается число, равное сумме квадратов всех уже записанных на ней чисел (так, если бы на доске изначально были записаны числа 1, 2, 2, то на первой минуте было бы дописано число $1^2 + 2^2 + 2^2$). Докажите, что соотое дописанное число имеет хотя бы 100 различных простых делителей.
5. У натурального числа n нашли все собственные делители (их оказалось не меньше трёх) и записали всевозможные их попарные суммы (повторно одинаковые суммы не записывали). Докажите, что полученный набор не мог оказаться набором всех собственных делителей никакого натурального числа.
6. На доске написано 100 натуральных чисел, среди которых ровно 33 нечетных. Каждую минуту на доску дописывается сумма всех попарных произведений всех чисел, уже находящихся на ней (например, если на доске были записаны числа 1, 2, 3, 3, то следующим ходом было дописано число $1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3$). Можно ли утверждать, что рано или поздно на доске появится число, делящееся на $2^{100000000}$?
7. Докажите, что существует натуральное число n , большее 10^{100} , такое, что сумма всех простых чисел, меньших n , взаимно проста с n .
8. Есть ли 2016-значное число, перестановкой цифр которого можно получить 2016 разных 2016-значных полных квадратов?

Домашнее задание

9. Приведите пример шести различных натуральных чисел таких, что произведение любых двух из них не делится на сумму всех чисел, а произведение любых трех из них — делится.
10. Взяли четыре натуральных числа. Для каждой пары этих чисел выписали их наибольший общий делитель. Получились шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, N , где $N > 5$. Какое наименьшее значение может принимать число N ?

Разнойой по ТЧ

1. Дан выпуклый четырехугольник периметра 10^{100} , у которого длины всех сторон - натуральные числа, а сумма длин любых трёх сторон делится на длину оставшейся четвертой стороны. Докажите, что этот четырехугольник - ромб.
2. На доску выписали все собственные делители некоторого составного натурального числа n , увеличенные на 1. Найдите все такие числа n , для которых числа на доске окажутся всеми собственными делителями некоторого натурального числа m . (Собственными делителями натурального числа $a > 1$ называются все его натуральные делители, отличные от a и от 1.)
3. По кругу расставлены 100 натуральных чисел. Каждое из них разделили с остатком на следующее по часовой стрелке. Могло ли получиться 100 одинаковых ненулевых остатков?
4. Изначально на доске записаны несколько (больше одного) натуральных чисел. Затем каждую минуту на доску дописывается число, равное сумме квадратов всех уже записанных на ней чисел (так, если бы на доске изначально были записаны числа 1, 2, 2, то на первой минуте было бы дописано число $1^2 + 2^2 + 2^2$). Докажите, что соотое дописанное число имеет хотя бы 100 различных простых делителей.
5. У натурального числа n нашли все собственные делители (их оказалось не меньше трёх) и записали всевозможные их попарные суммы (повторно одинаковые суммы не записывали). Докажите, что полученный набор не мог оказаться набором всех собственных делителей никакого натурального числа.
6. На доске написано 100 натуральных чисел, среди которых ровно 33 нечетных. Каждую минуту на доску дописывается сумма всех попарных произведений всех чисел, уже находящихся на ней (например, если на доске были записаны числа 1, 2, 3, 3, то следующим ходом было дописано число $1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3$). Можно ли утверждать, что рано или поздно на доске появится число, делящееся на $2^{100000000}$?
7. Докажите, что существует натуральное число n , большее 10^{100} , такое, что сумма всех простых чисел, меньших n , взаимно проста с n .
8. Есть ли 2016-значное число, перестановкой цифр которого можно получить 2016 разных 2016-значных полных квадратов?

Домашнее задание

9. Приведите пример шести различных натуральных чисел таких, что произведение любых двух из них не делится на сумму всех чисел, а произведение любых трех из них — делится.
10. Взяли четыре натуральных числа. Для каждой пары этих чисел выписали их наибольший общий делитель. Получились шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, N , где $N > 5$. Какое наименьшее значение может принимать число N ?