Рациональность и иррациональность.

Определение. *Число называется рациональным, если его можно представить в виде дроби* $\frac{p}{q}$, *где* p — *некоторое целое,* q — *натуральное число. Действительные числа, которые не являются рациональными, называются иррациональными.*

Определение. *Периодическая дробь- это бесконечная десятичная дробь, в которой, начиная с некоторого места цифры образуют периодическую последовательность. Периодическая дробь с целой частью* A, *предпериодом* $a_1, \ldots, a_k$ *и периодом* $b_1 \ldots b_n$ *обозначается:* $A, a_1 ... a_k (b_1 \ldots b_n)$.

1. Докажите, что сумма, разность, произведение и частное любых двух рациональных чисел также является рациональным числом (кроме случая, когда возникает деление на ноль).
2. $x = 0,(2)$. Найдите а) $10x$; б) $9x$.
3. $x = 3,(14)$. Найдите $99x$.
4. Представьте в виде обыкновенной дроби: а) $0,(3)$; б) $0,(1)$; в) $15,(68)$; г) $3,6(41)$; д) $0,(9)$.
5. Докажите, что любая периодическая дробь является рациональным числом.
6. Докажите, что любое рациональное число $\frac{p}{q}$— представляется в виде конечной десятичной или периодической дроби, причём если дробь периодическая, то её период не превосходит $q-1$.
7. а)Докажите, что $\sqrt{2}$ — иррациональное число.
   б)Докажите, что для натурального $\sqrt{n}$ является рациональным числом тогда и только тогда, когда n — квадрат целого числа.
8. Рациональными или иррациональными являются следующие числа:
   а) $0,101001000100001\ldots$; б) $0,123456789101112131415\ldots$?
9. Докажите, что на любом отрезке числовой прямой (сколь угодно малом) обязательно есть
   а) рациональное число; б) иррациональное число.
10. Может ли иррациональное число в иррациональной степени быть рациональным?
11. После запятой выписали степени 2021 в произвольном порядке. Может ли это число быть рациональным?

Домашнее задание

12. Назовем самой редкой цифрой числа любую из цифр, встречающихся в его десятичной записи не большее число раз, чем все остальные цифры. (В частности, если какие-то цифры в записи числа не встречаются, то самая редкая цифра — одна из них.) Саша составляет бесконечную последовательность цифр по такому правилу: на k-тое место он ставит любую из самых редких цифр числа k. Может ли Саша получить последовательность, периодическую с некоторого места?

Корни и иррациональность.

1. Иррациональны ли
   а)$\sqrt{2}+\sqrt{3}$; б) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$; в) $\sqrt[7]{1+\sqrt[5]{\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}}}$; г) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+2\sqrt{6}$; д) $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}+\sqrt{5}$.
2. Вычислите $\sqrt{n+508}+\sqrt{n}$, если известно, что это число рациональное и что n — натуральное.
3. Существуют ли иррациональные числа x и y такие, что числа $x+y^2$ и $x+2y$ рациональные?
4. Вычислите $\dfrac{1}{10-\sqrt{99}} - \dfrac{1}{\sqrt{99}-\sqrt{98}} + \dfrac{1}{\sqrt{98}-\sqrt{97}} - \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$
5. Докажите, что если $(a+b\sqrt{p})^n = A_n + B_n\sqrt{p}$, где p — произведение различных простых чисел, а числа a, b, A_n, B_n — рациональны, то $(a-b\sqrt{p})^n = A_n - B_n\sqrt{p}$.
6. Найдите первые 1000 знаков после запятой у следующих чисел
   а)$(6+\sqrt{35})^{1999}$; б) $(6+\sqrt{37})^{2000}$; в)$(6+\sqrt{39})^{1999}$.
7. а) Олег нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём 50 из них рациональные, а остальные 50 — иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал сумму чисел, написанных около её строки и её столбца («таблица сложения»). Какое наибольшее количество сумм в этой таблице могли оказаться рациональными числами?
   б) То же самое, только Олег вписывал произведения вместо сумм.
8. Числовое множество M, содержащее 2021 различных чисел, таково, что для любых двух различных элементов a, b из M число $a^2+b\sqrt{2}$ рационально. Докажите, что любого A из M число $A\sqrt{2}$ рационально.
9. Числа a, b удовлетворяют равенству $a^2b^2(a^2b^2+4) = 2(a^6+b^6)$. Докажите, что хотя бы одно из них иррационально.
10. Докажите, что $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = 1$.

Домашнее задание

11. Числа x, y, z таковы, что все три числа $x+yz$, $y+zx$ и $z+xy$ рациональны, а $x^2+y^2=1$. Докажите, что число xyz^2 также рационально.