Неравенство Коши-1.

Пусть $a > 0, b > 0$. Тогда справедливы неравенства между средними:

$$\min(a,b) \le \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \le \max(a,b)$$

1. Пусть $x, y > 0$. Докажите, что $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \ge 2$.
2. Пусть $x > 1$. Что больше $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}$ или $2\sqrt{x}$?
3. Докажите, что если произведение двух положительных чисел больше их суммы, то их сумма больше четырех.
4. Пусть $x + y = 1$. Докажите, что $x^8 + y^8 \ge \frac{1}{128}$.
5. При каких x дробь $\frac{81+16x^4}{x^2}$ принимает наименьшее значение?
6. Неотрицательные числа x и y удовлетворяют условию $x + y \le 1$. Докажите, что
$$12xy \le 4x(1-y) + 9y(1-x).$$
7. Докажите неравенство для положительных значений переменных

   а) $\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4} \le \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}$

   б) $\sqrt[2^n]{x_1x_2\ldots x_{2^n}} \le \frac{x_1+x_2+\ldots+x_{2^n}}{2^n}$

   в) $\sqrt[2^n]{x_1x_2\ldots x_{2^n}} \ge \frac{2^n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}$

   г)* Докажите неравенство Коши в общем виде.
   Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$. Тогда справедливы неравенства между средними:
$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}} \le \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \le \frac{x_1+x_2+\ldots x_n}{n} \le \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}}$$
8. Решите уравнение $x^4 + y^4 + 2 = 4xy$.
9. Найдите минимальное значение выражения
$$\sqrt{x_1^2+(1-x_2)^2} + \sqrt{x_2^2+(1-x_3)^2} + \ldots + \sqrt{x_n^2+(1-x_1)^2}$$

Неравенство Коши-1.

Пусть $a > 0, b > 0$. Тогда справедливы неравенства между средними:

$$\min(a,b) \le \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \le \max(a,b)$$

1. Пусть $x, y > 0$. Докажите, что $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \ge 2$.
2. Пусть $x > 1$. Что больше $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}$ или $2\sqrt{x}$?
3. Докажите, что если произведение двух положительных чисел больше их суммы, то их сумма больше четырех.
4. Пусть $x + y = 1$. Докажите, что $x^8 + y^8 \ge \frac{1}{128}$.
5. При каких x дробь $\frac{81+16x^4}{x^2}$ принимает наименьшее значение?
6. Неотрицательные числа x и y удовлетворяют условию $x + y \le 1$. Докажите, что
$$12xy \le 4x(1-y) + 9y(1-x).$$
7. Докажите неравенство для положительных значений переменных

   а) $\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4} \le \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}$

   б) $\sqrt[2^n]{x_1x_2\ldots x_{2^n}} \le \frac{x_1+x_2+\ldots+x_{2^n}}{2^n}$

   в) $\sqrt[2^n]{x_1x_2\ldots x_{2^n}} \ge \frac{2^n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}$

   г)* Докажите неравенство Коши в общем виде.
   Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$. Тогда справедливы неравенства между средними:
$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}} \le \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \le \frac{x_1+x_2+\ldots x_n}{n} \le \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}}$$
8. Решите уравнение $x^4 + y^4 + 2 = 4xy$.
9. Найдите минимальное значение выражения
$$\sqrt{x_1^2+(1-x_2)^2} + \sqrt{x_2^2+(1-x_3)^2} + \ldots + \sqrt{x_n^2+(1-x_1)^2}$$