

Функция Эйлера и теорема Эйлера.

Определение. Функция Эйлера (обозначается $\varphi(n)$) — это количество чисел от 1 до n , взаимно простых с n . Иными словами, это количество таких чисел в отрезке $[1; n]$, наибольший общий делитель которых с n равен единице.

Функция Эйлера.

Разбор 1-3.

1. Чему равно $\varphi(p)$? А $\varphi(p^a)$?
2. В таблицу $a \times b$ выписаны все последовательные числа подряд начиная с 1, причем $(a, b) = 1$.
 - а) Сколько в таблице чисел, взаимно простых с b ?
 - б) Сколько в каждом столбце чисел, взаимно простых с a ?
 - в) Докажите, что $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.
3. Как вычислить $\varphi(n)$ для $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$?
4. а) Докажите, что если $n > 2$, то число всех правильных несократимых дробей со знаменателем n — четно.
б) Найдите сумму всех правильных несократимых дробей со знаменателем n .
5. Решите уравнения
 - а) $\varphi(x) = 2$;
 - б) $\varphi(x) = 8$;
 - в) $\varphi(x) = 12$;
 - г) $\varphi(x) = 14$.

Теорема Эйлера. Пусть $m > 1$ и $(a, m) = 1$. Тогда имеет место сравнение $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

1. Докажите, что $5^{67} - 1$ делится на 2016.
2. Существует ли степень тройки, заканчивающаяся на 0001?
3. Докажите, что $(n^{84} - n^4)$ делится на 20400 для любого натурального n .
4. Пусть $a > 1$, $(a, b) = 1$. Докажите, что найдется такое n , что $1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n$ делится на b .
5. а) Докажите, что при любом нечетном n число $2^{n!} - 1$ делится на n .
б) Докажите, что при любом четном n число $2^{n!} - 1$ делится на $n^2 - 1$.
6. Дано число 2^{2013} . Докажите, что можно приписать к нему слева несколько цифр так, чтобы получилась степень двойки.
7. Докажите, что для любого натурального n существуют такие натуральные x, y , что $x^2 + y^2 - 1$ делится на n .
8. *Радикалом натурального числа N (обозначается $rad(N)$) называется произведение всех простых делителей числа N , взятых по одному разу. Например, $rad(120) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Существует ли тройка попарно взаимно простых натуральных чисел A, B, C таких, что $A + B = C$ и $C > 1000 \times rad(ABC)$?

Функция Эйлера и теорема Эйлера.

Определение. Функция Эйлера (обозначается $\varphi(n)$) — это количество чисел от 1 до n , взаимно простых с n . Иными словами, это количество таких чисел в отрезке $[1; n]$, наибольший общий делитель которых с n равен единице.

Функция Эйлера.

Разбор 1-3.

1. Чему равно $\varphi(p)$? А $\varphi(p^a)$?
2. В таблицу $a \times b$ выписаны все последовательные числа подряд начиная с 1, причем $(a, b) = 1$.
 - а) Сколько в таблице чисел, взаимно простых с b ?
 - б) Сколько в каждом столбце чисел, взаимно простых с a ?
 - в) Докажите, что $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.
3. Как вычислить $\varphi(n)$ для $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$?
4. а) Докажите, что если $n > 2$, то число всех правильных несократимых дробей со знаменателем n — четно.
б) Найдите сумму всех правильных несократимых дробей со знаменателем n .
5. Решите уравнения
 - а) $\varphi(x) = 2$;
 - б) $\varphi(x) = 8$;
 - в) $\varphi(x) = 12$;
 - г) $\varphi(x) = 14$.

Теорема Эйлера. Пусть $m > 1$ и $(a, m) = 1$. Тогда имеет место сравнение $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

1. Докажите, что $5^{67} - 1$ делится на 2016.
2. Существует ли степень тройки, заканчивающаяся на 0001?
3. Докажите, что $(n^{84} - n^4)$ делится на 20400 для любого натурального n .
4. Пусть $a > 1$, $(a, b) = 1$. Докажите, что найдется такое n , что $1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n$ делится на b .
5. а) Докажите, что при любом нечетном n число $2^{n!} - 1$ делится на n .
б) Докажите, что при любом четном n число $2^{n!} - 1$ делится на $n^2 - 1$.
6. Дано число 2^{2013} . Докажите, что можно приписать к нему слева несколько цифр так, чтобы получилась степень двойки.
7. Докажите, что для любого натурального n существуют такие натуральные x, y , что $x^2 + y^2 - 1$ делится на n .
8. *Радикалом натурального числа N (обозначается $rad(N)$) называется произведение всех простых делителей числа N , взятых по одному разу. Например, $rad(120) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Существует ли тройка попарно взаимно простых натуральных чисел A, B, C таких, что $A + B = C$ и $C > 1000 \times rad(ABC)$?