Алгебраические преобразования-1

1. Известно, что число $a+\dfrac{1}{a}$ – целое. Докажите, что число $a^2+\dfrac{1}{a^2}$ – тоже целое.
2. Сравните числа $A=\frac{99^{999}+1}{99^{1000}+1}$ и $B=\frac{99^{1000}+1}{99^{1001}+1}$.
3. Даны а) 3 числа б) 100 чисел. Когда каждое из них увеличили на 1, сумма их квадратов не изменилась. Каждое число ещё раз увеличили на 1. Изменится ли сумма квадратов на этот раз, и если да, то на сколько?
4. Запишите без "двухэтажных"радикалов
   а) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$
   б) $\sqrt{2\sqrt{7-4\sqrt{3}}}$
   в) $\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}$
5. Вычислите $\sqrt{2015\cdot 2017\cdot 2019\cdot 2021+16}$
6. Найдите наименьшее значение выражения $2a^2-8ab+17b^2-16a-4b+2068$.
7. Простое или составное число
   а)100^2+201 б)$999\ldots991$, где девяток 2021 в)$2^{10}+5^{12}$?
8. Четыре подряд идущих числа перемножили и прибавили 1. Доказать, что получился точный квадрат.
9. Положительные числа a,b,c таковы, что $a\geq b\geq c$ и $a+b+c\leq 1$. Докажите, что $a^2+3b^2+5c^2\leq 1$.

Домашнее задание

10. Известно, что $\dfrac{a}{b+c-a}=\dfrac{b}{a+c-b}=\dfrac{c}{a+b-c}$. Какие значения может принимать выражение $\dfrac{(a+b)(b+c)(a+c)}{abc}$?
11. Про три положительных числа известно, что если выбрать одно из них и прибавить к нему сумму квадратов двух других, то получится одна и та же сумма, независимо от выбранного числа. Верно ли, что все числа равны?

Алгебраические преобразования-1

1. Известно, что число $a+\dfrac{1}{a}$ – целое. Докажите, что число $a^2+\dfrac{1}{a^2}$ – тоже целое.
2. Сравните числа $A=\frac{99^{999}+1}{99^{1000}+1}$ и $B=\frac{99^{1000}+1}{99^{1001}+1}$.
3. Даны а) 3 числа б) 100 чисел. Когда каждое из них увеличили на 1, сумма их квадратов не изменилась. Каждое число ещё раз увеличили на 1. Изменится ли сумма квадратов на этот раз, и если да, то на сколько?
4. Запишите без "двухэтажных"радикалов
   а) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$
   б) $\sqrt{2\sqrt{7-4\sqrt{3}}}$
   в) $\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}$
5. Вычислите $\sqrt{2015\cdot 2017\cdot 2019\cdot 2021+16}$
6. Найдите наименьшее значение выражения $2a^2-8ab+17b^2-16a-4b+2068$.
7. Простое или составное число
   а)100^2+201 б)$999\ldots991$, где девяток 2021 в)$2^{10}+5^{12}$?
8. Четыре подряд идущих числа перемножили и прибавили 1. Доказать, что получился точный квадрат.
9. Положительные числа a,b,c таковы, что $a\geq b\geq c$ и $a+b+c\leq 1$. Докажите, что $a^2+3b^2+5c^2\leq 1$.

Домашнее задание

10. Известно, что $\dfrac{a}{b+c-a}=\dfrac{b}{a+c-b}=\dfrac{c}{a+b-c}$. Какие значения может принимать выражение $\dfrac{(a+b)(b+c)(a+c)}{abc}$?
11. Про три положительных числа известно, что если выбрать одно из них и прибавить к нему сумму квадратов двух других, то получится одна и та же сумма, независимо от выбранного числа. Верно ли, что все числа равны?

Алгебраические преобразования-2

1. Вычислите $(1+2)(1+2^2)(1+2^4)(1+2^8)\cdot\ldots\cdot(1+2^{1024})$.
2. Докажите, что если $a+b=c+d$ и $a^2+b^2=c^2+d^2$, то $a^n+b^n=c^n+d^n$
3. Докажите, что к любому числу, равному произведению двух последовательных натуральных чисел, можно приписать в конце какие-то две цифры так, что получится квадрат натурального числа.
4. Назовем целое число хорошим, если оно представляется в виде суммы 2 квадратов(5-хорошее $5=1^2+2^2$, 3-нет). Докажите, что
а) удвоенное хорошее число будет хорошим
б) произведение двух хороших будет хорошим.
в) Найдите пару натуральных чисел x и y таких, что $x^2+y^2=19451945$.
5. Известно, что $a+b+c=0, \quad a^2+b^2+c^2=1$. Найдите $a^4+b^4+c^4$.
6. Докажите, что если
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \qquad \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0,$$
то
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (x,y,z,a,b,c - \text{отличны от } 0)$$
7. Натуральные числа $a, b,$ таковы, что $a^2+b^2+c^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$. Докажите, что каждое из трёх чисел ab, bc, ca является точным квадратом.
8. Выясните конечно или бесконечно число решений уравнения в натуральных числах. $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=3$

Домашнее задание

9. Числа x, y, z таковы, что $xyz=1$. Вычислите значение выражения
$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+xz}.$$

Алгебраические преобразования-2

1. Вычислите $(1+2)(1+2^2)(1+2^4)(1+2^8)\cdot\ldots\cdot(1+2^{1024})$.
2. Докажите, что если $a+b=c+d$ и $a^2+b^2=c^2+d^2$, то $a^n+b^n=c^n+d^n$
3. Докажите, что к любому числу, равному произведению двух последовательных натуральных чисел, можно приписать в конце какие-то две цифры так, что получится квадрат натурального числа.
4. Назовем целое число хорошим, если оно представляется в виде суммы 2 квадратов(5-хорошее $5=1^2+2^2$, 3-нет). Докажите, что
а) удвоенное хорошее число будет хорошим
б) произведение двух хороших будет хорошим.
в) Найдите пару натуральных чисел x и y таких, что $x^2+y^2=19451945$.
5. Известно, что $a+b+c=0, \quad a^2+b^2+c^2=1$. Найдите $a^4+b^4+c^4$.
6. Докажите, что если
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \qquad \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0,$$
то
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (x,y,z,a,b,c - \text{отличны от } 0)$$
7. Натуральные числа $a, b,$ таковы, что $a^2+b^2+c^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$. Докажите, что каждое из трёх чисел ab, bc, ca является точным квадратом.
8. Выясните конечно или бесконечно число решений уравнения в натуральных числах. $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=3$

Домашнее задание

9. Числа x, y, z таковы, что $xyz=1$. Вычислите значение выражения
$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+xz}.$$