

Планарные графы.

Определение. Граф называют планарным (плоским), если он его можно нарисовать на плоскости так, чтобы его ребра не пересекались (во внутренних точках).

Обозначения. Пусть дан граф на плоскости. Тогда V - число вершин, P - число рёбер, а Γ — число граней, т.е. частей, на которые рёбра графа разбивают плоскость.

1. Можно ли расположить на плоскости
 - а) 4 точки так, чтобы каждая из них была соединена отрезками с тремя другими (без пересечений)?
 - б) 6 точек и соединить их непересекающимися отрезками так, чтобы из каждой точки выходило ровно 4 отрезка?
2. а) Докажите формулу Эйлера для дерева $V - P + \Gamma = 2$.
*б) Докажите формулу Эйлера для связного планарного графа $V - P + \Gamma = 2$.
в) Выразите через количество компонент, чему равно $V - P + \Gamma$ для несвязного планарного графа?
3. В квадрате отметили 20 точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами квадрата так, что квадрат разбился на треугольники. Сколько получилось треугольников?
4. Докажите, что для связного графа при $V \geq 3$
 - а) для графа на плоскости $2P \geq 3\Gamma$,
 - б) для связного графа на плоскости $P \leq 3V - 6$,
 - в) последнее неравенство верно для произвольного графа на плоскости.
5. Докажите, что полный граф на 5 вершинах не планарный.
6. Есть три домика и три колодца. Можно ли соединить каждый домик с каждым колодцем тропинкой так, чтобы тропинки не пересекались?
7. а) Докажите, что в плоском графе есть вершина, степень которой не превосходит 5.
б) Докажите, что конечная плоская карта допускает раскраску в 6 цветов такую, что соседние страны будут окрашены в разные цвета.
8. Какое наибольшее число клеток доски 9×9 можно разрезать по обеим диагоналям, чтобы при этом доска не распалась на несколько частей?
9. *Всегда ли выпуклый многогранник является плоским графом?
Домашнее задание
10. Докажите, что граф, имеющий 10 вершин, степень каждой из которых равна 5, – не плоский

Планарные графы.

Определение. Граф называют планарным (плоским), если он его можно нарисовать на плоскости так, чтобы его ребра не пересекались (во внутренних точках).

Обозначения. Пусть дан граф на плоскости. Тогда V — число вершин, P — число рёбер, а Γ — число граней, т.е. частей, на которые рёбра графа разбивают плоскость.

1. Можно ли расположить на плоскости
 - а) 4 точки так, чтобы каждая из них была соединена отрезками с тремя другими (без пересечений)?
 - б) 6 точек и соединить их непересекающимися отрезками так, чтобы из каждой точки выходило ровно 4 отрезка?
2. а) Докажите формулу Эйлера для дерева $V - P + \Gamma = 2$.
*б) Докажите формулу Эйлера для связного планарного графа $V - P + \Gamma = 2$.
в) Выразите через количество компонент, чему равно $V - P + \Gamma$ для несвязного планарного графа?
3. В квадрате отметили 20 точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами квадрата так, что квадрат разбился на треугольники. Сколько получилось треугольников?
4. Докажите, что для связного графа при $V \geq 3$
 - а) для графа на плоскости $2P \geq 3\Gamma$,
 - б) для связного графа на плоскости $P \leq 3V - 6$,
 - в) последнее неравенство верно для произвольного графа на плоскости.
5. Докажите, что полный граф на 5 вершинах не планарный.
6. Есть три домика и три колодца. Можно ли соединить каждый домик с каждым колодцем тропинкой так, чтобы тропинки не пересекались?
7. а) Докажите, что в плоском графе есть вершина, степень которой не превосходит 5.
б) Докажите, что конечная плоская карта допускает раскраску в 6 цветов такую, что соседние страны будут окрашены в разные цвета.
8. Какое наибольшее число клеток доски 9×9 можно разрезать по обеим диагоналям, чтобы при этом доска не распалась на несколько частей?
9. *Всегда ли выпуклый многогранник является плоским графом?
Домашнее задание
10. Докажите, что граф, имеющий 10 вершин, степень каждой из которых равна 5, – не плоский